

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. február 10.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

2018. február 10.

Az írásbeli próbavizsga időtartama: 240 perc

Kérjük, nyomtatott nagy betűkkel töltsse ki!

Név	
E-mail cím	
Tanárok neve	
Pontszám	

STUDIUM GENERALE

MATEMATIKA SZEKCIÓ



Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.



4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részsámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletsámítások bemutatását is. **Egyéb esetben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy a **szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.**1.**

- a) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} \geq \frac{\lg 4}{\lg 8}$$

- b) Adja meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát a $[0; 2\pi[$ intervallumon!

$$\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Jelölje A az a), B a b) feladat megoldásainak halmazát.

- c) Intervallumok segítségével adja meg az $\overline{A \setminus B}$ halmazt!

a)	5 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	12 pont	

2. Tapasztalatok alapján annak a valószínűsége, hogy egy teljesítménytúrán egy véletlenszerűen kiválasztott versenyző megtalálja a 3-as számú ellenőrzési pontot 0,65. A mostani kihíváson 15 túrázó vesz részt.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a túrán legalább 2 résztvevő nem találja meg az ellenőrzési pontot? Válaszát négy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A 3-as pont egy fennsíkon álló kilátót jelöl, továbbá a fennsíkon két tűzrakóhely is található. Jelölje a tűzrakóhelyeket az A és a B pont. Az A pont és a kilátó távolsága 100 méter, a kilátó csúcspontja az A pontból 45° -os, a B pontból 30° -os emelkedési szögben látszik. Az A pontot a kilátó talppontjával összekötő egyenes 60° -os szöget zár be az AB egyenessel.

b) Milyen messze van egymástól a két tűzrakóhely?

a)	4 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	13 pont	

3. Egy konferencián nők és férfiak vesznek részt. Tudjuk, hogy több nő van jelen, mint férfi és összesen 36-an vannak a konferencián. Érkezéskor mindenki mindenkit üdvözl: a nők puszit adnak egymásnak, a férfiak kezet fognak egymással, a nőknek a férfiak kezet csókolnak.

a) Hány kézfogás történt, ha 323 kézcsókra került sor?

Az elhangzott előadások után a résztvevők 9 fős csoportokra oszlanak, hogy megvitassák a hallottakat. Az egyik csoportban megkérdezték, hogy a konferencia előtt ki hány embert ismert a csoporttársai közül. A válaszok a következők voltak: 1 fő mondott 5-öt, 3 fő 2-t, 2 fő 3-at, 2 fő 4-et és 1 fő 1-et.

b) Hányféleképp választhatunk ki a csoportból 2 főt úgy, hogy ők korábban még nem ismerték egymást?

Ákos a többi csoportról a következőket állította:

- Van olyan csoport, ahol mindenki pontosan 7 embert ismert korábban.
- Van olyan csoport, ahol pontosan 38 ismeretség volt korábban.

c) Döntse el, hogy lehet-e igaza Ákosnak! Válaszát indokolja!

a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

4. Az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvényről az alábbiakat tudjuk:

- A függvény egyetlen zérushelye $x = -1$.
- A függvény két szélsőértéke az $x = 1$ és $x = 3$ helyeken van.
- A függvény értéke az $x = 2$ helyen 18.

a) Adja meg az $f(x)$ függvény a, b, c, d paramétereit!

Adott a $g(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x$ függvény.

b) Határozza meg a $g(x)$ függvény konvexitását, valamint inflexiós pontját!

a)	9 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy kisvárosi lottójátékon n db különböző nyerőszámot sorsoltak ki. A számok egy olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek első eleme 3, az elemek összege 93, a nyerőszámok reciprokainak összege pedig $\frac{31}{48}$.

a) Adja meg a lottón kisorsolt nyerőszámokat!

Tamás megnyerte a főnyereményt, 2865000 Ft-ot. A nyertes ezt az összeget 1 éven keresztül akarja kamatoztatni. Két kedvező ajánlatot kapott. A Fitying Bank a náluk elhelyezett összeg esetén 1 millió forintig 0,5%, az 1 millió feletti összegre 0,63% kamatot fizet havonta. A Peták Bank kéthavi lekötést ajánl kéthavi 1,4%-os kamatra.

b) Melyik ajánlatot válassza Tamás, ha célja, hogy 1 év múlva minél nagyobb összeggel támogathassa a családját?

a)	10 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

6. Van kilenc számkártyánk: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. A kártyákat négy csoportba rakjuk úgy, hogy egyikben se legyen együtt egy szám és egy nála nagyobb többszöröse.

a) Adjon meg egy lehetséges csoportosítást!

A számkártyák mindegyikének felhasználásával kilencjegyű számokat képzünk.

b) Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, 3 számok egymáshoz képest (nem szükségképpen egymás mellett) növekvő sorrendben helyezkednek el?

A számkártyák közé beteszünk még n db hármast. Ezután az összes lehetséges módon $n+9$ jegyű számokat képzünk, majd ezek közül tetszőlegesen kiválasztunk egyet. Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám osztható 4-gyel $\frac{2}{13}$.

c) Hány darab hármast tettünk be a számkártyák közé?

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

7. Egy 10 cm oldalú négyzet alapú gúla oldaléleinek hossza 20 cm.

- a) Milyen magasan kell elmetszeni a testet az alaplappal párhuzamos síkkal, hogy a két rész térfogata megegyezzen?

A metszés után keletkezett csonkagúlába olyan gömböt írunk, melynek térfogata maximális.

- b) Mekkora a gömb térfogata?

Klári néni négyzet alapú gúla, valamint gömb alakú gyertyákat gyárt, összesen 46 darabot. A gyertyákat két, egymás alatti polcon, 1-től 23-ig megszámozott helyeken tartja. Azonban egyik délután az unokája az alsó polcon összekeverte a számokat.

- c) Bizonyítsa be, hogyha a felső sorban álló számokból kivonjuk az alattuk állókat, és a különbségeket összeszorozzuk, akkor páros szám lesz a végeredmény!

a)	7 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

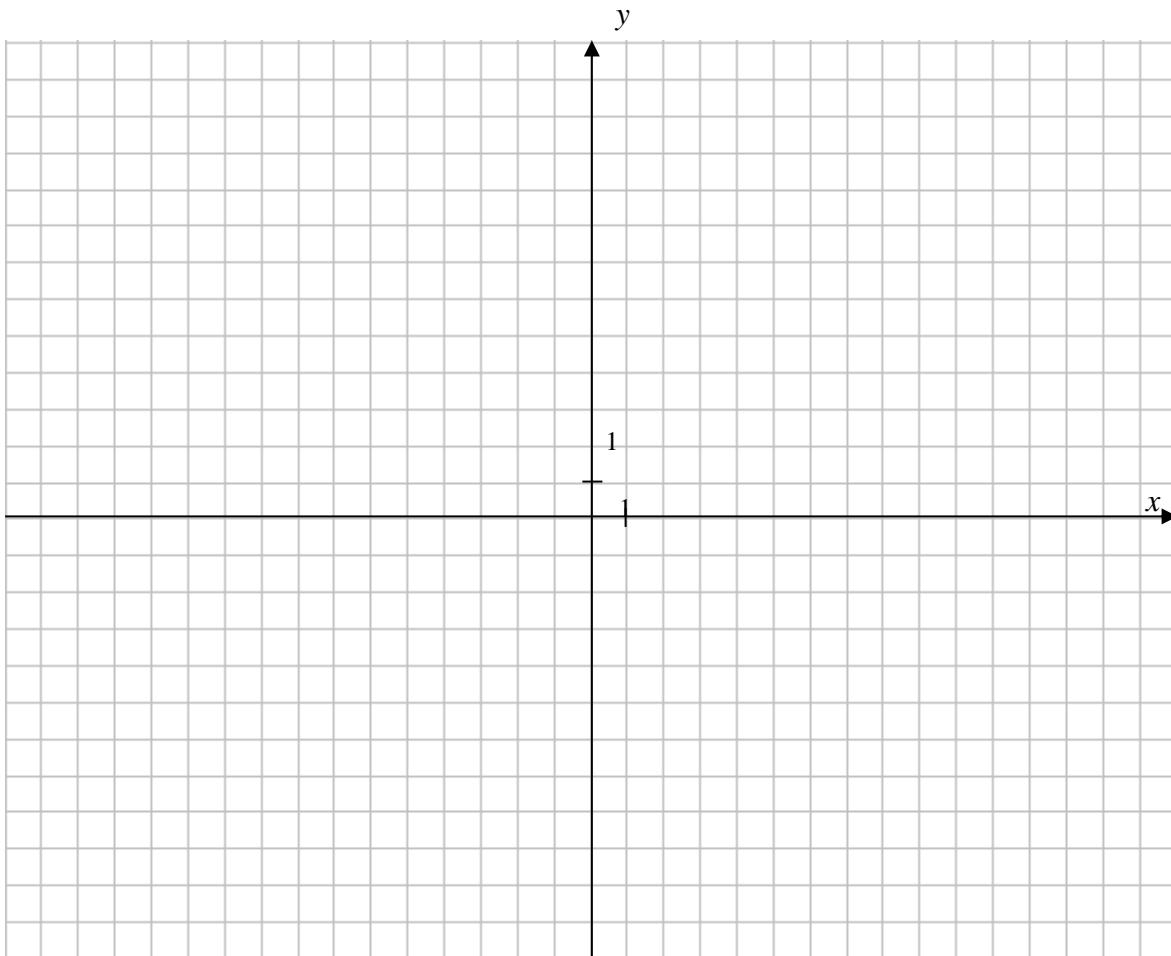
8. Az $y - 2 = (x - 1)^2$ egyenletű parabola P_1 és P_2 pontjaiból az $A(1; 2)$ és $B(1; 6)$ pontok által határolt szakasz derékszögben látszik.

a) Adja meg a P_1 és P_2 pontok koordinátáit!

A parabola, valamint az $(1 + \sqrt{3}; 5)$ és az $(1 - \sqrt{3}; 5)$ pontok által meghatározott egyenes egy síkidomot határolnak.

b) Számítsa ki ennek a síkidomnak a területét!

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	



Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy középiskolában két érettségiző osztály volt 2017-ben. Az A osztály létszáma volt nagyobb, mégpedig a B-ben végzettek $p\%$ -ával. Az A osztályban végzettek $\frac{3}{5}$ -e, a B osztályban végzettek 70%-a érettségizett emelt szinten matematikából, a többiek történelemből. A tanulók között nem volt olyan, aki két tárgyból érettségizett emelt szinten. Az összes matematikát választó diák a végzettek $r\%$ -a.

a) Igazolja, hogy $r = 60 + \frac{1000}{200 + p}$!

Az évfolyamról 27-en érettségiztek matematikából, 21-en történelemből emelt szinten. Az általuk elért érdemjegyeket mutatja az alábbi gyakorisági tábla.

Érdemjegy	Matematika			Történelem		
	3	4	5	3	4	5
Érettségiző (fő)	16	6	5	10	8	3

- b) A matematikából középezt szerző diákok közül legalább hánynak kellett volna 4-est szereznie a többiek változatlan teljesítménye mellett ahhoz, hogy a matematikaérettségi átlaga legalább 3,8 legyen?
- c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a történelemből érettségizett diákok közül véletlenszerűen kiválasztott 2 diák átlaga legalább 4,2? Válaszát négy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

a)	8 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

	feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	12		51	
	2.	13			
	3.	12			
	4.	14			
II. rész		16		64	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli próbavizsga pontszáma				115	

javító tanár