PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. február 10.

# MATEMATIKA

## KÖZÉPSZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

## Javítási útmutató

## 2018. február 10.

## STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

**I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!**

**1) Adott a következő két halmaz: $A = \{12 \text{ pozitív osztói}\}$, $B = \{\text{egyjegyű pozitív prímek}\}$.**

**a) Sorolja fel az $A \cap B$ halmaz elemeit! (1 pont)**

**b) Hány elemű az $A \setminus B$ halmaz? (1 pont)**

***Megoldás:***

a) $A$ halmaz elemei $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. $B$ halmaz elemei $B = \{2; 3; 5; 7\}$. A metszet a két halmaz közös elemeit tartalmazza, tehát $\boldsymbol{A \cap B = \{2; 3\}}$. (1 pont)

b) Az $A$ és $B$ halmaz különbsége $A$ azon elemei, amelyek nem elemei $B$-nek. Tehát $A / B = \{1; 4; 6; 12\}$, tehát a különbség **4 elemű**. (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

**2) Egy évfolyam tanulóinak 45%-a lány. Hányan vannak az évfolyamon, ha a fiúk száma 88? (2 pont)**

***Megoldás:***

A fiúk az évfolyam 55%-át teszik ki, tehát a teljes évfolyam létszáma megkapható az $x \cdot 0,55 = 88$ egyenletből. Ezt rendezve: $x = \frac{88}{0,55} = \mathbf{160}$. (2 pont)

**Összesen: 2 pont**

**3) Melyik szám nagyobb $\mathbf{101101_2}$ vagy $\mathbf{46_{10}}$? (2 pont)**

***Megoldás:***

$101101_2$ tízes számrendszerre átírva $32 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 45$, tehát a $\mathbf{46_{10}}$ **a nagyobb szám.** (2 pont)

**Összesen: 2 pont**

**4) Mi a hozzárendelési szabálya az ábrán látható függvénynek? (2 pont)**

***Megoldás:***

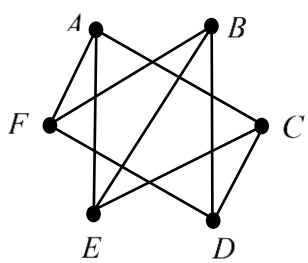
c) $\boldsymbol{f(x) = \frac{5}{3}x + 2}$ (2 pont)

**Összesen: 2 pont**

**5) Egy osztály hat diákja közül mindenki három másik osztálytársával tartott már párban kiselőadást. Cili már adott elő Dáviddal és Eszterrel, Alíz még nem szerepelt együtt sem Brigivel, sem Dáviddal. Kivel nem adott még elő Fanni?**
**Válaszát indokolja! (3 pont)**

***Megoldás:***

A már megtartott előadások gráffal szemléltethetők: (2 pont)




Fanni **Cilivel és Eszterrel** nem tartott még előadást. (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**6) Határozza meg az alábbi állítások logikai értékét!**

**a) Egy konvex kilencszög belső szögeinek összege $1440°$.**

**b) Egy háromszög súlyvonala mindig felezi a háromszög területét.**

**c) Van tengelyesen szimmetrikus paralelogramma.**

**d) A háromszög középvonalai mindig egy pontban metszik egymást. (3 pont)**

***Megoldás:***

a) Hamis
b) Igaz
c) Igaz
d) Hamis (3 pont)
(4 jó válaszra 3, 3 jó válaszra 2, 2 jó válaszra 1 pont adható.)

**Összesen: 3 pont**

**7) Milyen valós *x* érték esetén teljesül az alábbi egyenlőség?**

$$\log_4(2x-5)=\frac{1}{2}$$ **(2 pont)**

***Megoldás:***

A logaritmus szabályát kihasználva $\frac{1}{2}=\log_4 2$. (1 pont)

Ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe: $\log_4(2x-5)=\log_4(2)$

Egyenletet megoldva a megoldás: $\mathbf{x=\frac{7}{2}}$ (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

**8) Egy focista két passzolási lehetőséget lát, az egyik játékos 15, a másik 22 méterre áll tőle. Milyen messze van egymástól a két csapattársa, ha az őket összekötő szakaszt $125°$-os szögben látja? (Válaszát egészre kerekítve adja meg!)**

**Válaszát indokolja! (3 pont)**

***Megoldás:***

Távolságuk megkapható a koszinusztétel alkalmazásával: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. (1 pont)

$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\sqrt{15^2+22^2-2\cdot15\cdot22\cdot\cos125°}=32,98$ (1 pont)

Távolságuk **33 m**. (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**9) Jázmin kivágott egy filc háromszöget, melynek oldalai 8, 13, és 15 centiméter hosszúak. Jázmin öccse, Áron, szeretne egy nagyobb, de Jázminéhoz hasonló háromszöget kivágni, melynek kerülete 48 cm. Mekkora lesz Áron háromszögének legnagyobb oldala? (2 pont)**

***Megoldás:***

Jázmin háromszögének a kerülete: $K=8+13+15=36$ cm

A két háromszög kerületének hányadosa a hasonlóság aránya: $\lambda=\frac{48}{36}=\frac{4}{3}$ (1 pont)

Áron háromszögének leghosszabb oldala: $15\cdot\frac{4}{3}=$ **20 cm** (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

**10) Egy hangya elindul egyenesen a koordinátarendszer $(4;2)$ pontjából az origó felé. Írja fel a mozgását leíró egyenes egyenletét! (2 pont)**

***Megoldás:***

Az egyenes meredekségét leolvasva a koordinátákból: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, és mivel az origón megy át.

a keresett egyenlet $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$ vagy $\boldsymbol{x-2y=0}$. (2 pont)

**Összesen: 2 pont**

***Alternatív megoldás:***

Az egyenes két pontja az origó $(0;0)$ és a $(4;2)$ pontok, melyekből felírható az egyenes normálvektora: $n(-2;4)$. (1 pont)

Az egy ponton átmenő normálvektorú egyenes képletét felhasználva: $-2x+4y=-2\cdot4+4\cdot2$

Ezt rendezve $\boldsymbol{-2x+4y=0}$ (vagy ezzel ekvivalens egyenletek is elfogadhatók). (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

**11) Adja meg a következő egyenlet $[\pi;2\pi]$ intervallumba eső megoldásait a valós számok halmazán!**

$$\boldsymbol{\cos(2x)=\frac{1}{2}}$$ **(3 pont)**

***Megoldás:***

Ha $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\frac{1}{2}$, akkor az egyenletbe visszahelyettesítve $2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$

Egyenletet megoldva: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ (1 pont)

Ha $\cos\left(\frac{5\pi}{3}+2l\pi\right)=\frac{1}{2}$, akkor az egyenletbe visszahelyettesítve $2x=\frac{5\pi}{3}+2l\pi$, ahol $l\in\mathbb{Z}$

Egyenletet megoldva: $x=\frac{5\pi}{6}+l\pi$ (1 pont)

A $[\pi;2\pi]$ intervallumba eső megoldások: $\boldsymbol{x_1=\frac{7\pi}{6}}$, $\boldsymbol{x_2=\frac{11\pi}{6}}$ (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**12) Egy mértani sorozat első tagja $\frac{5}{2}$. Az első három tag összege $\frac{95}{18}$. Mekkora lehet a második tag? (4 pont)**

**Válaszát indokolja!**

***Megoldás:***

Az első tag: $a_1=\frac{5}{2}$

Felhasználva az első tagot és a három tag összegét: $a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2=\frac{95}{18}$ (1 pont)

Az első tagot behelyettesítve a korábbi egyenletbe a következő kifejezést kapjuk: $\frac{5}{2}+\frac{5}{2}q+\frac{5}{2}q^2=\frac{95}{18}$

Az egyenletből $\frac{5}{2}$-et kiemelve és egyszerűsítve vele a következő másodfokú kifejezést kapjuk:

$1+q+q^2=\frac{19}{9}$

Amelynek két gyöke: $q_1=\frac{2}{3}$ és $q_2=-\frac{5}{3}$. (1 pont)

I. megoldás: $q_1=\frac{2}{3}\Rightarrow a_2=a_1\cdot q=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{5}{3}}$ (1 pont)

II. megoldás: $q_2=-\frac{5}{2}\Rightarrow a_2=a_1\cdot q=\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\mathbf{-\frac{25}{6}}$ (1 pont)

**Összesen: 4 pont**

***Maximális elérhető pontszám: 30 pont***

**II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!**

**13) Adott a $[-2;4[$ intervallumon értelmezett $f(x) = -2|x-2| + 4$ függvény.**

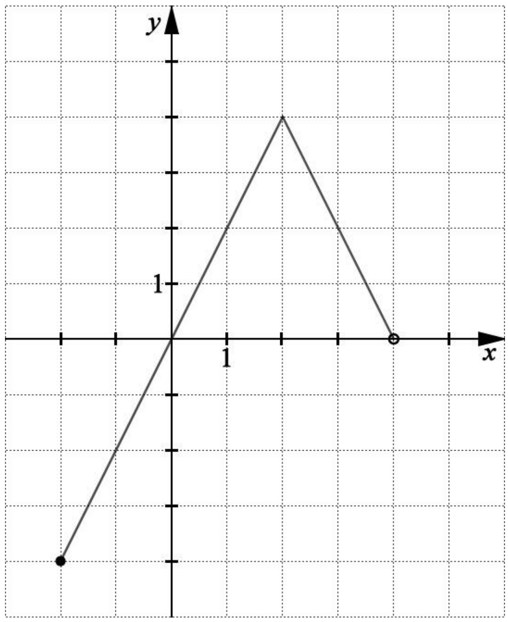
**a) Ábrázolja az $f(x)$ függvényt!** **(3 pont)**

**b) Adja meg az $f(x)$ függvény értékkészletét és szélsőértékeit!** **(5 pont)**

**c) Ábrázolja számegyenesen a $\frac{\sqrt{5-x}}{x-2} \geq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!** **(5 pont)**

***Megoldás:***

a) Ábrázolás során a következő pontok kaphatók:
Abszolútérték függvény „v" alakjának helyes ábrázolása, meredekség kétszerezése, tükrözés az $x$ tengelyre. (1 pont)
Eltolás az $x$ tengely mentén jobbra 2-vel, és az $y$ tengely mentén felfelé 4-gyel. (1 pont)
Intervallumhatárok helyes ábrázolása. (1 pont)

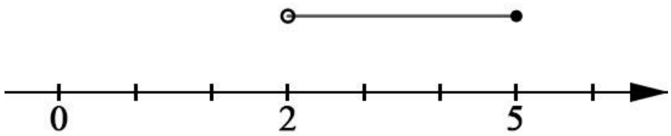



b) $R_f = [-4;4]$ (1 pont)

**(Abszolút) maximum: $(2;4)$** (2 pont)

**(Abszolút) minimum: $(-2;-4)$** (2 pont)

c) Kikötés: $x \leq 5$ és $x \neq 2$ (1 pont)
Mivel a számláló minden értelmezési tartománybeli $x$-re nemnegatív, ezért a nevezőnek is pozitívnak kell lennie. (1 pont)
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (1 pont)
Kikötéssel összevetve: $2 < x \leq 5$ (1 pont)
Számegyenesen ábrázolva: (1 pont)




**Összesen: 13 pont**

**14) Egy derékszögű háromszög alakú szendvicset készítünk, melynek legrövidebb oldala 6 cm, az átfogóhoz tartozó magassága 4,8 cm.**

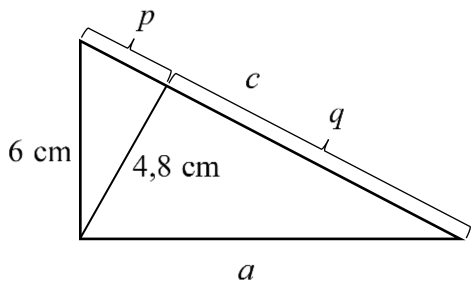
**a) Milyen hosszú majonéz csíkkal lehet körbevenni a szendvicset?** **(5 pont)**

**b) Legalább mekkora sugarú kör alakú párizsit kell vennünk, hogy teljesen lefedje a kenyeret?** **(2 pont)**

**c) Egészre kerekítve hány százaléka lóg le a párizsinak a szendvicsről?** **(3 pont)**

**d) Emese szerint, ha egy 13 cm átfogójú, 5 cm befogójú derékszögű háromszöget megforgatunk a rövidebbik befogója körül, akkor nagyobb térfogatú kúpot kapunk, minthogyha a hosszabbik befogója körül forgattuk volna meg. Zsófi szerint Emese téved. Melyik lánynak van igaza? Miért?** **(3 pont)**

***Megoldás:***




a) $m_c = 4,8 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$

A magasság és a megadott oldal hosszából Pitagorasz-tétel felírásával megkapjuk az ábra szerinti átfogó $p$ részét. $p = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = 3,6 \text{ cm}$ (1 pont)

Magasságtételt felhasználva kiszámolható az átfogó másik oldala.

$q = \frac{m_c^2}{p} = \frac{4,8^2}{3,6} = 6,4 \text{ cm}$ (1 pont)

Az átfogó két részét összeadva megkapjuk az átfogó hosszát: $3,6 + 6,4 = 10 \text{ cm}$ (1 pont)

Újabb Pitagorasz-tételt felhasználva kiszámítható a harmadik oldal:

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}$ (1 pont)

Tehát $K = a + b + c = 8 + 6 + 10 =$ **24 cm** hosszú majonéz csíkkal lehet körbevenni. (1 pont)

b) Thalész-tétel megfordítása miatt: (1 pont)

$R = \frac{c}{2} = \frac{10}{2} =$ **5 cm** sugarú párizsit kell vennünk. (1 pont)

c) A párizsi területe: $R^2\pi = 25\pi \text{ cm}^2$

A szendvics területe: $\frac{ab}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ cm}^2$ (1 pont)

A lelógó rész a két terület különbsége: $25\pi - 24$ (1 pont)

$\frac{25\pi - 24}{25\pi} \approx$ **69%**-a lóg le a párizsinak a szendvicsről. (1 pont)

d) Másik befogó Pitagorasz-tételből: $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

Kisebb befogó körül megforgatott kúp térfogata: $V_1 = \frac{r^2\pi \cdot M}{3} = \frac{12^2\pi \cdot 5}{3} = 240\pi$ (1 pont)

Nagyobbik befogó körül megforgatott kúp térfogata: $V_2 = \frac{5^2\pi \cdot 12}{3} = 100\pi$ (1 pont)

Mivel $V_1 > V_2$, ezért **Emesének van igaza**. (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**15) Egy céges bulin 90 alkalmazott koccint úgy, hogy először a nők koccintanak egymással, utána a férfiak ugyanígy. Összesen 1984 koccintás történt.**

**a) Hány férfi van a céges bulin, ha tudjuk, hogy a nők vannak többen? (6 pont)**

**b) Ha az első 90 pozitív egész számból kiválasztunk kettőt, mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét számban van 5-ös számjegy? (4 pont)**

***Megoldás:***

a) $x =$ nők száma, $90 - x =$ férfiak száma. (1 pont)

A nők között $\frac{x(x-1)}{2}$, a férfiak között $\frac{(90-x)(89-x)}{2}$ darab koccintás történt, összesen

$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(90-x)(89-x)}{2} = 1984$ (1 pont)

Rendezés után: $x^2 - 90x + 2021 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 43$, ekkor a férfiak száma 47, de mivel tudjuk, hogy a nők vannak többen, ez a feladat szövege szerint nem helyes megoldás. (1 pont)

$x_2 = 47$, ekkor a férfiak száma 43, ami kevesebb, mint a nők száma. (1 pont)

Tehát **43** férfi van a céges bulin. (1 pont)

b) Az első 90 pozitív egész szám közül, amelyek tartalmaznak 5-ös számjegyet:
$5; 15; 25; 35; 45; 50; 51; 52; 53; 54; 55; 56; 57; 58; 59; 65; 75; 85$, ez 18 darab. (1 pont)

Kedvező esetek száma: $\binom{18}{2}=153$ (1 pont)

Mivel 90 számból választunk kettőt, az összes eset: $\binom{90}{2}=4005$ (1 pont)

Tehát a keresett valószínűség: $\frac{\binom{18}{2}}{\binom{90}{2}}=\mathbf{0,038}$ (1 pont)

**Összesen: 10 pont**

***Maximális elérhető pontszám: 36 pont***

**II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!**

**16) Vettel az első 10 Forma 1-es futamon háromszor szerzett $25$ pontot, kétszer $18$-at, egyszer $15$-öt és $12$-t, kétszer $6$-ot, egyszer pedig nem szerzett pontot.**

**a) Hány pontot ért el Vettel eddig átlagosan? (2 pont)**

**b) Mennyi az általa elért pontok szórása? (2 pont)**

**c) A német pilóta által megszerzett pontok a következő három versenyen egy számtani sorozatot alkotnak. Ha a legsikeresebb eredményéhez még $32$ extra pontot kapna, akkor ebből a három számból egy mértani sorozat első három tagja lenne. Hány pontot ért el az elmúlt három versenyen egyenként, ha összesen $30$ pontot szerzett? (7 pont)**

**d) Annak a valószínűsége, hogy Vettel futamot nyer 65%. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét hátralévő futam közül legalább hármat megnyer? (6 pont)**

***Megoldás:***

a) $\overline{Y}=\frac{3\cdot 25+2\cdot 18+15+12+2\cdot 6+0}{10}=\frac{150}{10}=\mathbf{15\ pont}$ (2 pont)

Vettel eddig átlagosan 15 pontot ért el.

b) $\sigma=\sqrt{\frac{3\cdot(25-15)^2+2\cdot(18-15)^2+(15-15)^2+(12-15)^2+2\cdot(6-15)^2+(0-15)^2}{10}}=8,45$

$\sigma=\mathbf{8,45}$ (2 pont)

c) A következő három pontszám számtani sorozatot alkot, tehát felírhatók a következő alakban $a_1=a_2-d$, $a_2$ és $a_3=a_2+d$, továbbá tudjuk, hogy összegük 30, vagyis:

$(a_2-d)+(a_2)+(a_2+d)=30\Rightarrow a_2=10$ (1 pont)

$a_2-d;\ a_2;\ a_2+d+32$ egy mértani sorozatot alkot, amelybe a már ismert $a_2$-t behelyettesítve a következőt kapjuk: $10-d;\ 10;\ 42+d$ (1 pont)

Mértani sorozat egymást követő három tagjára teljesül, hogy a szélső két tag szorzata a középső tag négyzetével egyenlő, tehát $(10-d)\cdot(42+d)=100$ (2 pont)

Ezt rendezve $d^2+32d-320=0$ (1 pont)

Az egyenlet megoldásai: $d_1=8$ és $d_2=-40$ (szöveg szerint lehetetlen) (1 pont)

Vettel az utolsó három versenyen $\mathbf{2;10;18}$ pontot ért el. (1 pont)

d) $P(\text{nyer}) = 0,65$, ekkor $P(\text{nem nyer}) = 0,35$ (1 pont)

Legalább három győzelem: $P(A) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$

$A$ komplementere, a kevesebb, mint három győzelem: $P(\overline{A}) = P(0) + P(1) + P(2)$

Mivel a kedvezőtlen esetekből van kevesebb, érdemes komplementer eseménnyel számolni. (1 pont)

$P(0 \text{ győzelem}) = 0,35^7$ (1 pont)

$P(1 \text{ győzelem}) = \binom{7}{1} \cdot 0,65 \cdot 0,35^6$ (1 pont)

$P(2 \text{ győzelem}) = \binom{7}{2} \cdot 0,65^2 \cdot 0,35^5$ (1 pont)

Ezek összege: $0,0556$, vagyis a legalább 3 győzelem valószínűsége $1 - 0,0556 = \mathbf{0,9444}$ (1 pont)

**Összesen: 17 pont**

**17) A derékszögű koordinátarendszerben egy karót szúrunk az $O(-2;7)$ pontba, amihez egy öt méteres pórázzal kikötünk egy kutyát. (Legyen a koordinátarendszer egy egysége 1 méter.)**

**a) Elhelyezünk egy gumikacsát az $A(1;2)$, és egy gumicsontot a $B(-3;3)$ pontba. Melyik játékot érheti el a kutya? (4 pont)**

**b) Írja fel a legnagyobb sugarú kör egyenletét, amit bejárhat a póráz elszakítása nélkül! (3 pont)**

**c) Körbe-körbe futás közben a póráz elszakad, épp amikor a $(2;10)$ ponton szalad át, így onnan az érintő mentén halad tovább. Írja fel az érintő egyenletét! (6 pont)**

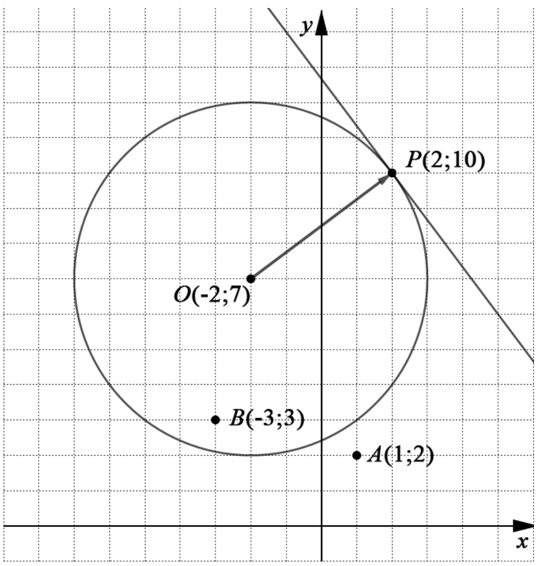
**d) Írja le a következő állítás megfordítását!**

**„Ha egy kutya ugat, akkor nem harap.” (2 pont)**

**e) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!**

**„Minden kutya ugat.” (2 pont)**

***Megoldás:***




a) Azt a játékot érheti el, melynek az $O$ ponttól való távolsága nem nagyobb, mint 5 méter. (1 pont)

Az $O$ pontból $A$ pontba húzott vektor: $\overrightarrow{OA}(3;-5)$

Melynek hossza:

$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \approx 5,83 > 5$ (1 pont)

Az $O$ pontból $B$ pontba húzott vektor: $\overrightarrow{OB} = (-1;-4)$

Melynek hossza:

$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} \approx 4,12 < 5$ (1 pont)

Tehát csak a ***B*** pontban található játékot érheti el. (1 pont)

b) Mivel a póráz végpontja az $O$ pontban van rögzítve, így a kör középpontja: $O(-2;7)$ (1 pont)

Továbbá tudjuk, hogy a póráz hossza 5 méter, amely egyenlő a kör sugarával: $r = 5$ (1 pont)

Ezekből az adatokból felírható a kör egyenlete: $\mathbf{(x+2)^2 + (y-7)^2 = 25}$ (1 pont)

c) A keresett egyenes a $P(2;10)$ pontba húzott kört érintő egyenes lesz. (1 pont)

Ennek az egyenesnek a normálvektora az $O$-ból $P$-be húzott irányvektor $90^\circ$-os elforgatottja lesz: $\overrightarrow{OP_0} = \underline{n}(4;3)$ (2 pont)

Az egyenes egy pontját és normálvektort felhasználva az egyenes egyenlete:

$4x + 3y = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 10$ (2 pont)

Tehát az érintő egyenlete: $\mathbf{4x + 3y = 38}$ (1 pont)

d) Az állítás megfordítása: **„Ha egy kutya nem harap, akkor ugat.”** (2 pont)

e) Az állítás tagadása: **„Van olyan kutya, amelyik nem ugat.”**

Vagy: **„Nem minden kutya ugat.”** (2 pont)

**Összesen: 17 pont**

**18) Egy 90 férőhelyes szállodában több programot is szerveztek az ott lakóknak a két ünnep között: lehetett bowlingozni, várost nézni, és korcsolyázni is. A 90 vendégből 26-an vettek részt mindhárom programon, 6-an egyiken sem. 36-an voltak városnézésen és bowlingozni is, 34-en várost nézni és korcsolyázni.**

**a) Hányan vettek részt csak a városnézésen, ha ugyanannyian voltak várost nézni, illetve bowlingozni, és nincs olyan, aki csak korcsolyázott? (7 pont)**

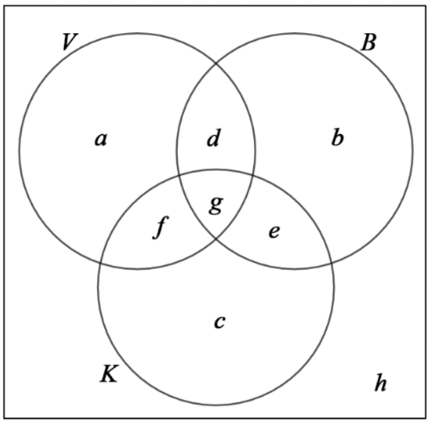
**b) Azok közül, akik mindhárom programon részt vettek 9-nek nincs gyermeke, 4-nek egy, 5-nek kettő, 6-nak három, a többieknek pedig négy gyerekük van. Határozza meg az adatok móduszát és mediánját! (4 pont)**

**c) Akik nem vettek részt egyik programon sem, elmentek együtt karaoke bárba, ahol - egy apró technikai hiba folytán - mindenki két dalból (egy magyar, egy külföldi) választhatott, és mindenki egyedül énekelt. Hányféle sorrendben hangozhattak el a dalok, ha 4-en énekeltek magyarul? (3 pont)**

**d) A tavalyi évben, amikor szintén teltház volt, egyszerre volt a három program. Így mindenki csak az egyiken tudott részt venni, viszont a szálloda minden lakója választott magának közülük elfoglaltságot: bowlingozni 30-an, városnézésen 18-an voltak. Készítse el a három program kördiagramját! (3 pont)**

***Megoldás:***

a) Venn-diagram jelöléseit felhasználva összesen 90, a hármas metszetben 26, kívül pedig 6 fő található.




$a+b+c+d+e+f+g+h=90$

$g=26$

$h=6$ (1 pont)

$c=0$

$d+g=36 \Rightarrow d=10$ (1 pont)

$f+g=34 \Rightarrow f=8$ (1 pont)

Mivel ugyanannyian voltak bowlingozni mint városnézésen

$a+d+g+f=b+e+d+g$

$a+10+8=b+e+10$

$a+8=b+e$ (1 pont)

Az első egyenletbe visszahelyettesítve

$a+a+8+10+8+26+6=90$

$2a=32$ (2 pont)

$a=16$

Csak városnézésen **16**-an vettek részt. (1 pont) b)

| Gyerekek száma | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Üdülők száma | 9 | 4 | 5 | 6 | 2 |

Módusz (a leggyakrabban előforduló elem): **0** (2 pont)

Medián sorszáma: $\frac{n+1}{2}=\frac{26+1}{2}=13,5$ (1 pont)

Medián tehát növekvő sorrendben a 13. és 14. elem számtani átlaga $\frac{1+2}{2}$, tehát **1,5**. (1 pont)

c) A négy magyar és két külföldi dal összes lehetséges sorrendjét a hat elem ismétléses permutációjával kapjuk meg. $\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$ (2 pont)

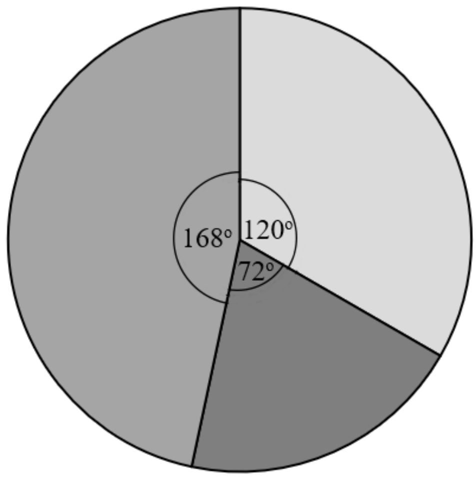
A dalok **15** féle sorrendben hangozhattak el. (1 pont)

d) A 90 üdülő mindegyike részt vett valamelyik programon.

Egy főhöz tartozó középponti szög: $\frac{360}{90}=4^\circ$.

Az egyes programokhoz tartozó középponti szögek tehát: bowling $30\cdot 4^\circ=120^\circ$, városnézés $18\cdot 4^\circ=72^\circ$ és korcsolyázás $42\cdot 4^\circ=168^\circ$ (1 pont)

Ábrázolás… (2 pont)




**Összesen: 17 pont**

***A szerezhető maximális pontszám: 100 pont***