

**MATEMATIKA**  
**PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA**  
**EMELT SZINT**

**2019. február 16.**

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Kérjük nyomtatott nagybetűvel töltsé ki!

Név	
Teremszám*	
Pontszám	
E-mail cím	


\* A teremszám csak akkor kitöltendő, ha részt vesz a szombati oktatásainkon.

**STUDIUM GENERALE**  
**MATEMATIKA SZEKCIÓ**



## Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.  


4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részsámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás,  $n!$ ,  $\binom{n}{k}$  kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a  $\pi$  és az  $e$  szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletsámítások bemutatását is. **Egyéb esetben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy a **szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

**I.****1.**

- a) A 420-nak és az  $n$  pozitív egész számnak a legnagyobb közös osztója 21. Milyen  $n$  értékek felelnek meg a kritériumnak, ha  $n \leq 420$ ?
- b) Hány olyan négyjegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melyben a számjegyek szorzata 50-re végződik?
- c) A 7160 számjegyei segítségével képeztük az összes lehetséges négyjegyű számot úgy, hogy minden számjegyet pontosan egyszer használtunk fel. Mennyi az előállított számok átlaga?

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

2.

- a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

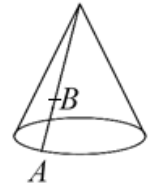
$$\log_{3x} 3 + 4\log_{9x} 3 = 6$$

- b) Adja meg az
- $x^3 + x^2z + xyz + y^2z - y^3$
- kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy
- $x + z - y = 0$
- és
- $x, y, z \in \mathbb{R}$
- !

a)	9 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	13 pont	



3. Legyen adott egy egyenes forgáskúp alakú hegy. A hegy tővében található  $A$  pontból indul egy sikló, az ugyanazon az alkotón található  $B$  pontba. A hegy alkotója 600 méter, alapkörének átmérője 400 méter és  $AB = 100$  méter.



- a) Milyen hosszú utat tesz meg a sikló, ha megkerüli a hegyet és a legrövidebb úton megy?

A hegyen 5 sikló közlekedik. Panni egy nap minden siklót kipróbált, és feljegyezte azok sebességét egy lapra, viszont a papír, amire írt elszakadt, így csak három sikló sebessége maradt olvasható rajta. A leglassabb sikló 1 km/h-val, a leggyorsabb 7 km/h-val, egy harmadik pedig 6 km/h-val közlekedik. Panni szeretne volna kideríteni a másik két sikló sebességét is, így megkérdezte a kalauzt. A kalauz egy fejtörővel válaszolt. „Az öt sikló sebességének átlaga, pont kétszerese a sebességek szórásának, valamint a sebességek terjedelme 2,5-szerese a szórásuknak.”

- b) Segítsen Panninak kiszámolni a maradék két sikló sebességét!

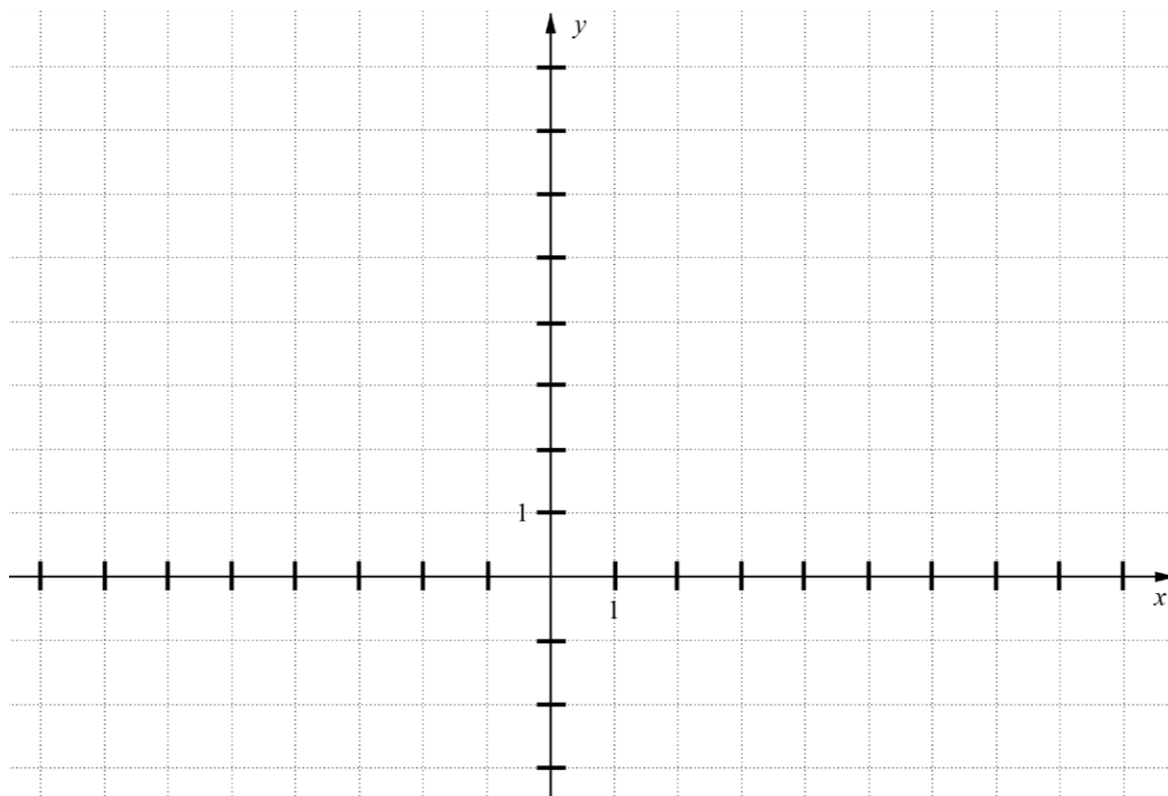
a)	7 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	13 pont	



4. Adott az  $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$  egyenletű parabola, valamint egy, a parabola fókuszpontján átmenő,  $\underline{v}(4;3)$  irányvektorú egyenes.
- a) Mely pontokban metszi az egyenes a parabolát?
- b) Legyen adott egy négyszög, melynek csúcsai  $A(-4;4,5)$ ;  $B(4;4,5)$ ;  $C(4;-1)$  és  $D(-4;-1)$ . A ceruzánkkal véletlenszerűen teszünk egy pontot a négyzeten belülré. Mennyi a valószínűsége, hogy a parabola fölé kerül a pont? Válaszát négy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

a)	7 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	13 pont	





**II.**

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

5. Legyen adott egy 8 pontú teljes gráf, melynek minden élét beszínezzük pirosra, kékre vagy zöldre. Így végül 8 élét pirosra, 5-öt kékre, a maradékot pedig zöldre színeztük. (A gráf pontjait megkülönböztetjük!)

a) Hányféle különböző színezést kaphatunk? Adja meg, hogy milyen kombinatorikai problémáról van szó (permutáció, variáció, kombináció)!

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz olyan kör a gráfban, melynek minden éle kék?

A 12.b osztály diákjai körmérkőzéses kő-papír-olló versenyt rendeztek egymás között. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Az eredmények érdekesen alakultak: a résztvevők közül bármely két játékoshoz volt egy olyan játékos, akit mindketten legyőztek.

c) Legalább hányan vettek részt a versenyben? Ábrázoljon gráffal egy lehetséges beosztást!

a)	3 pont	
b)	7 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	



**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

6. Máténak 3 darab fikusza van. Egyik nap unalmában megszámolta, hány levele van a fikuszainak. Arra jött rá, hogy a három fikuszon levő levelek számai egy mértani sorozatot alkotnak, és a szorzatuk 1728. Ha levágna a legtöbb levelű fikusz levelei közül 8-at, majd ebből 2-t a legkevesebb levelű fikuszra ragasztana, egy számtani sorozatot kapna.

a) Hány levél volt az egyes fikuszokon? Mennyi a számtani sorozat differenciája?

Máté elég sok időt tölt a növények gondozásával. Mindig egyszerre több fikusszal foglalkozik. Naponta a növényekre szánt idejének 70% -ában az elsőt, 60% -ában a másodikat, 90% -ában pedig a harmadikat gondozza. Így pontosan 5 percet foglalkozik mindhárom fikusszal.

b) Hány percet tölt a növények gondozásával naponta Máté?

Máté kedvenc fikuszára kiemelten figyel, így nyitott egy bankszámlát, hogy a növény minden költségét fedezni tudja. Egy éven keresztül minden hónap elején 1000 Ft-ot tesz a számlára. Ezután a következő évben minden hónap első napján ellátogat a virágboltba, és 250 Ft-ért különleges trágyát, 150 Ft-ért új kitámasztó pálcát vesz a fikuszának, valamint 100 Ft-ért egy szál virágot anyukájának, a bankszámlán levő pénzből. A második év végére a fikusz olyan nagyra nő, hogy muszáj Máténak átültetnie egy új cserépbe, ezért a számlán levő összes pénzből új cserepet vásárol.

c) Mennyi pénzért vett új cserepet Máté, ha a havi kamat 5%? (A kamatfizetés mindig a hó végén esedékes.)

a)	7 pont	
b)	3 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	



**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

7. Egy csokoládégyárban 4 fogaskerék hajtja a csokikeverő gépezetet. (A fogaskerekek tökéletesen kör alakúak.)
- a) Bizonyítsa be az alábbi állítást!  
„Ha négy kör mindegyike 2-2 másikat kívülről érint, akkor a négy kör érintési pontjai egy körön vannak.”
- b) Fogalmazza meg az a) részben szereplő állítás megfordítását, majd az így kapott állítást tagadja!
- c) Igazolja igazságtáblával, hogy  $(A \rightarrow B) \rightarrow C \equiv [(\neg A) \rightarrow C] \wedge [B \rightarrow C]!$

Egy másik gépben ugyanígy 4 fogaskerék van, csak más méretűek. A négy fogaskerék középpontjait összekötve, egy szimmetrikus trapézot kapunk. Az A fogaskerék sugara 5 cm, a C fogaskerék sugara pedig 3 cm.

- d) A fogaskerekek területének hány százaléka esik a szimmetrikus trapézot kívül?

a)	3 pont	
b)	2 pont	
c)	5 pont	
d)	6 pont	
Ö.:	16 pont	



**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.  
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

8. A csokigyárban olyan egyenes hasáb alakú csokoládékat gyártanak, melyeknek alapja egy derékszögű háromszög, aminek az átfogójához tartozó magasság az átfogót egy 4 cm-es és egy 12 cm-es darabra osztja. A hasáb magassága 1,5 cm. Egy napon a gyártósor meghibásodott, és minden tábla csokoládéból levágott a derékszögű csúccsal szemközti lappal párhuzamosan egy darabot. A levágott darab alaplapjának kerülete  $\frac{4(3+\sqrt{3})}{3}$  cm.
- a) Mekkora az eredeti csokoládé alapháromszögének befogói és az átfogóhoz tartozó magassága?
- b) Mekkora a meghibásodott gyártósoron gyártott csokik térfogata?
- c) A hiba miatt a cég által gyártott csokik 25%-os valószínűséggel kisebb méretűek lettek. Tomi, hogy meglepje édesszájú anyukáját, 7 darab csokoládét vásárolt neki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 jó méretű csokoládét vásárolt?

a)	3 pont	
b)	8 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	





**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

9. Kukutyin egy kis falu az Óperenciás tengeren is túl. Népességszáma mindössze 23 fő. A falu egy völgyben helyezkedik el, mely keresztmetszetének domborzatát az  $f(x) = |12x - 2x^2 - 10|$  függvény írja le.

- a) Ábrázolja a függvényt derékszögű koordináta-rendszerben a  $]0; 7]$  intervallumon!

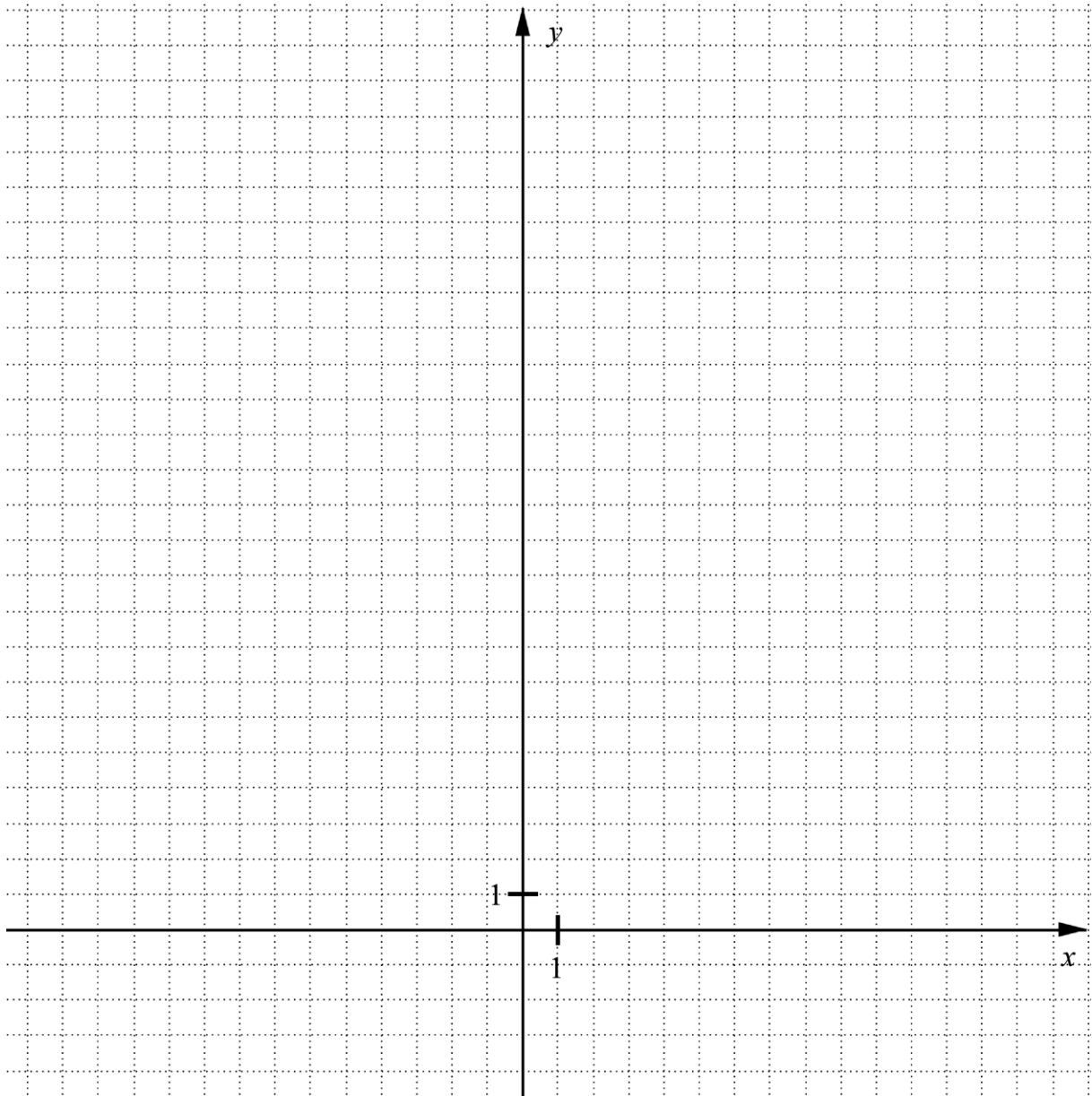
Kukutyin egyetlen benzinkútjának milliárd forintban megadott profitja az előző évben a következő függvény szerint alakult:  $f(x) = -4 \sin^2 x - (2 + 2\sqrt{3}) \cos x + 4 + \sqrt{3}$ .

- b) Az év hány százalékában volt veszteséges a benzinkút, ha egy évet a  $]0; \pi[$  intervallumon értelmezzük a helyi közgazdászok?

Kukutyinban az autók fogyasztása eléggé változó, ezt az  $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 8x + 34$  függvény írja le, ahol  $x$  az autó években vett életkorát jelöli.

- c) Mennyi idős autó átlagfogyasztása a legkedvezőbb és mennyi ez az átlagfogyasztás? (Az autó korát egész hónapra kerekítve adja meg!)

a)	2 pont	
b)	7 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	



	feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	12		<b>51</b>	
	2.	13			
	3.	13			
	4.	13			
II. rész		16		<b>64</b>	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
<b>Az írásbeli próbavizsga pontszáma</b>				<b>115</b>	

---

javító tanár