PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA ●2019. február 16.

MATEMATIKA

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

EMELT SZINT

JAVÍTÁSI – ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

2019. február 16.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

Fenti chatbotkód használati útmutató: messengerben koppints bal fent a fejed ikonjára, majd a messenger kódodra, ezután a kód beolvasása gombra! Beszélgess Bettivel, a chatbottal és találj hozzád illő jól fizető munkát! (m.me/diakmunka)

1.

a) **A 420-nak és az *n* pozitív egész számnak a legnagyobb közös osztója 21. Milyen *n* értékek felelnek meg a kritériumnak, ha $n \leq 420$? (4 pont)**

b) **Hány olyan négyjegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melyben a jegyek szorzata 50-re végződik? (4 pont)**

c) **A 7160 számjegyei segítségével képeztük az összes lehetséges négyjegyű számot úgy, hogy minden számjegyet pontosan egyszer használtunk fel. Mennyi az előállított számok átlaga? (4 pont)**

Megoldás:

a) Felírjuk a 420 és a 21 prímtényezős felbontását.

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $\text{LNKO} = 21 = 3 \cdot 7$, $n = ?$ (1 pont)

Mivel a legnagyobb közös osztó 21, *n* prímtényezői között biztosan szerepel 3 és 7, viszont biztosan nem szerepel 2 és 5. (1 pont)

Így *n* lehetséges értékei: **21**, **63**, **147**, **189**, **231**, **273**, **357** és **399**. (2 pont)

b) Egy négyjegyű számban a jegyek szorzata akkor végződhet 50-re, ha a jegyei prímtényezős felbontásaiban szerepel a $2 \cdot 5^2 = 50$. (1 pont)

A számjegyek prímtényezős felbontásában maximum egy darab kettes lehet. (1 pont)

Tíz lehetőségünk van:

$1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ ilyen számból $\frac{4!}{2!} = 12$ db van.

$3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ ilyen számból $\frac{4!}{2!} = 12$ db van.

$5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 250$ ilyen számból $\frac{4!}{3!} = 4$ db van.

$7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 350$ ilyen számból $\frac{4!}{2!} = 12$ db van.

$9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 450$ ilyen számból $\frac{4!}{2!} = 12$ db van.

$6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 150$ ilyen számból $\frac{4!}{2!} = 12$ db van.

$6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 450$ ilyen számból $\frac{4!}{2!} = 12$ db van.

$6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$ ilyen számból $\frac{4!}{3!} = 4$ db van.

$6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 1050$ ilyen számból $\frac{4!}{2!} = 12$ db van.

$6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 = 1350$ ilyen számból $\frac{4!}{2!} = 12$ db van. (1 pont)

Összesen **104** ilyen szám van. (1 pont)

c) Összesen $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ ilyen szám van. (1 pont)

6-6 olyan szám van, amikor az 1-es, 6-os vagy 7-es az ezres helyiértéken áll és 4-4 olyan, amikor más helyiértékeken. (1 pont)

Emiatt a 18 képezhető szám összege $6(1000 + 6000 + 7000) + 4(111 + 666 + 777) =$

$= 90216$. (1 pont)

A számok átlaga $\frac{90216}{18} = \mathbf{5012}$. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Összesen $3\cdot 3\cdot 2\cdot 1=18$ ilyen szám van. (1 pont)
A 18 szám a 1067, 1076, 1607, 1706, 1670, 1760, 6017, 6071, 6107, 6701, 6170, 6710, 7016, 7061, 7106, 7601, 7160 és 7610. (1 pont)
Ezek összege 90216. (1 pont)
A számok átlaga $\frac{90216}{18}=\mathbf{5012}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

2.

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\log_{3x}3+4\log_{9x}3=6$$ **(9 pont)**

b) Adja meg az $x^3+x^2z+xyz+y^2z-y^3$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $x+z-y=0$ és $x,y,z\in\mathbb{R}$! **(4 pont)**

Megoldás:

a) Kikötés: a logaritmus miatt: $x>0$; $x\neq\frac{1}{3}$ és $x\neq\frac{1}{9}$ (1 pont)

Felhasználva a $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ azonosságot:

$$\frac{1}{\log_3 3x}+\frac{4}{\log_3 9x}=6$$ (1 pont)

$$\frac{1}{\log_3 3+\log_3 x}+\frac{4}{\log_3 9+\log_3 x}=6$$

$$\frac{1}{1+\log_3 x}+\frac{4}{2+\log_3 x}=6$$ (1 pont)

Új ismeretlent vezetünk be $\Rightarrow$ $a=\log_3 x$

$$\frac{1}{1+a}+\frac{4}{2+a}=6 \Rightarrow 1\cdot(2+a)+4\cdot(1+a)=6\cdot(2+a)(1+a) \Rightarrow a+2+4a+4=6\cdot\left(a^2+3a+2\right)$$

$\Rightarrow 5a+6=6a^2+18a+12$

Átrendezve $\Rightarrow$ $6a^2+13a+6=0$ (1 pont)

Ennek gyökei: $a_1=-\frac{2}{3}$ és $a_2=-\frac{3}{2}$ (1 pont)

Tehát $\log_3 x_1=-\frac{2}{3} \Rightarrow x_1=3^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ (1 pont)

Vagy $\log_3 x_2=-\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3^3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

Az egyenlet megoldásai a valós számok halmazán $\mathbf{x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}}$, illetve $\mathbf{x_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}}$. (1 pont)

b) A kifejezés átrendezve: $x^3 - y^3 + x^2z + xyz + y^2z =$ (1 pont)

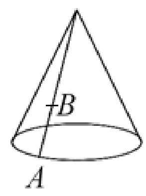
$= (x-y)(x^2+xy+y^2) + z(x^2+xy+y^2) =$ (1 pont)

$= (x^2+xy+y^2)(x-y+z)$ (1 pont)

Mivel $x-y+z=0 \Rightarrow \mathbf{(x^2+xy+y^2)(x-y+z)=0}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

3. Legyen adott egy egyenes forgáskúp alakú hegy. A hegy tövében található *A* pontból indul egy sikló, az ugyanazon az alkotón található *B* pontba. A hegy alkotója 600 méter, alapkörének átmérője 400 méter és $AB = 100$ méter.



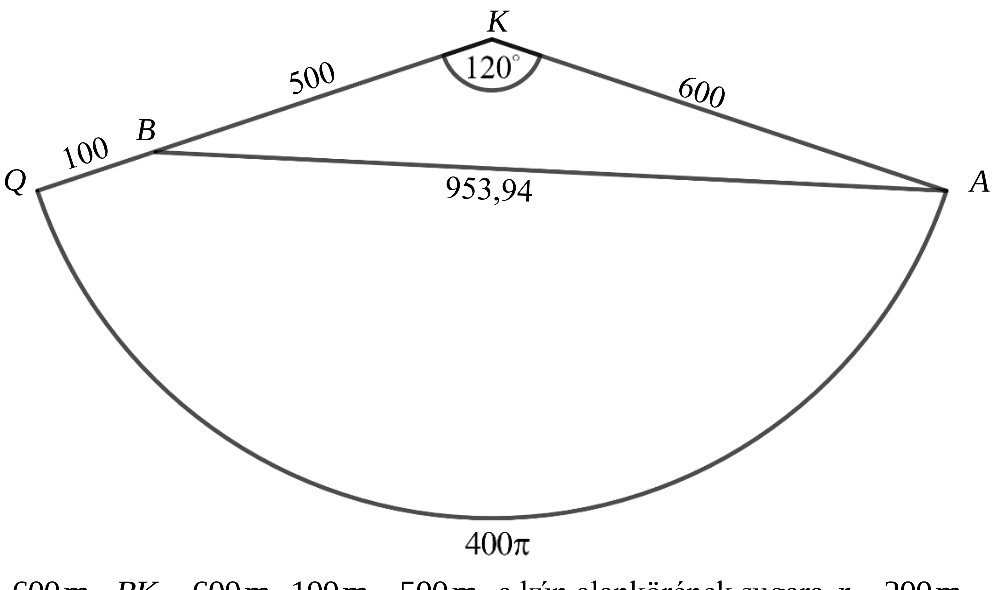
a) Milyen hosszú utat tesz meg a sikló, ha megkerüli a hegyet és a legrövidebb úton megy? (7 pont)

A hegyen 5 sikló közlekedik. Panni egy nap minden siklót kipróbált, és feljegyezte azok sebességét egy lapra, viszont a papír, amire írt elszakadt, így csak három sikló sebessége maradt olvasható rajta. A leglassabb sikló 1 km/h-val, a leggyorsabb 7 km/h-val, egy harmadik pedig 6 km/h-val közlekedik. Panni szerette volna kideríteni a másik két sikló sebességét is, így megkérdezte a kalauzt. A kalauz egy fejtörővel válaszolt. „Az öt sikló sebességének átlaga, pont kétszerese a sebességek szórásának, valamint a sebességek terjedelme 2,5-szerese a szórásuknak.”

b) Segítsen Panninak kiszámolni a maradék két sikló sebességét! (6 pont)

Megoldás:

a) Felrajzoljuk a forgáskúp kiterített palástját. (1 pont)



$AK = 600\,\text{m}$, $BK = 600\,\text{m} - 100\,\text{m} = 500\,\text{m}$, a kúp alapkörének sugara $r = 200\,\text{m}$.
Az AQ körív hossza megegyezik a kúp alapkörének kerületével. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AQ = 2 \cdot 200 \cdot \pi = 400\pi$ m (1 pont)

QKA körcikk egy nagyobb kör része, melynek kerülete $\Rightarrow K_{\bigcirc} = 2 \cdot 600 \cdot \pi = 1200\pi$ m (1 pont)

$\alpha = \frac{400\pi}{1200\pi} \cdot 360^\circ = 120^\circ$ (1 pont)

Koszinusztételt felírva az $AKB_\triangle$-ben $\Rightarrow AB^2 = 500^2 + 600^2 - 2 \cdot 500 \cdot 600 \cdot \cos(120^\circ)$ (1 pont)

$AB^2 = 910000 \Rightarrow AB = 953,94$ m (1 pont)

A sikló **953,94 méter** utat tesz meg. (1 pont)

b) Legyen a két ismeretlen sebességű sikló sebessége x km/h és y km/h.
Mivel tudjuk, hogy a leggyorsabb sikló sebessége 7 km/h, a leglassabbé pedig 1 km/h, a terjedelem 6 km/h. Tehát a libegők sebességeinek szórása 2,4, átlaguk pedig 4,8. (1 pont)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1+6+7+x+y}{5} = 4,8 \\ \sqrt{\dfrac{(1-4,8)^2+(6-4,8)^2+(7-4,8)^2+(x-4,8)^2+(y-4,8)^2}{5}} = 2,4 \end{array}\right\}$$ (1 pont)

$$\left.\begin{array}{l} x+y=10 \\ (x-4,8)^2+(y-4,8)^2 = 8,08 \end{array}\right\}$$ (1 pont)

Az $y = 10 - x$-et visszahelyettesítjük a másik egyenletbe $\Rightarrow (x-4,8)^2+(5,2-x)^2 = 8,08$

$x^2 - 10x + 21 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 7,\ y_1 = 3$ vagy $x_2 = 3,\ y_2 = 7$. (1 pont)

Tehát a maradék két sikló sebessége **3 km/h** és **7 km/h**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

4. Adott egy $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$ egyenletű parabola, valamint egy, a parabola fókuszpontján átmenő, $\underline{v}(4;3)$ irányvektorú egyenes.

a) Mely pontokban metszi az egyenes a parabolát? (7 pont)

b) Legyen adott egy négyszög, melynek csúcsai $A(-4;4,5)$; $B(4;4,5)$; $C(4;-1)$ és $D(-4;-1)$. A ceruzánkkal véletlenszerűen teszünk egy pontot a négyzeten belülre. Mennyi a valószínűsége, hogy a parabola fölé kerül a pont? Válaszát négy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

Megoldás:

a) A parabola meredeksége $\frac{1}{4}$, így $\frac{1}{2p} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = 2$. (1 pont)

A tengelypontja $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, így fókuszpontjának koordinátái:

$F\left(0;\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right) = F\left(0;\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right) = F\left(0;\frac{3}{2}\right)$. (1 pont)

A $\underline{v}(4;3)$ irányvektorú egyenes átmegy a parabola fókuszpontján, ezért:

$3x - 4y = 3\cdot 0 - 4\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow 4y = 3x + 6$ (1 pont)

A parabola egyenletét az egyenes egyenletébe behelyettesítve:

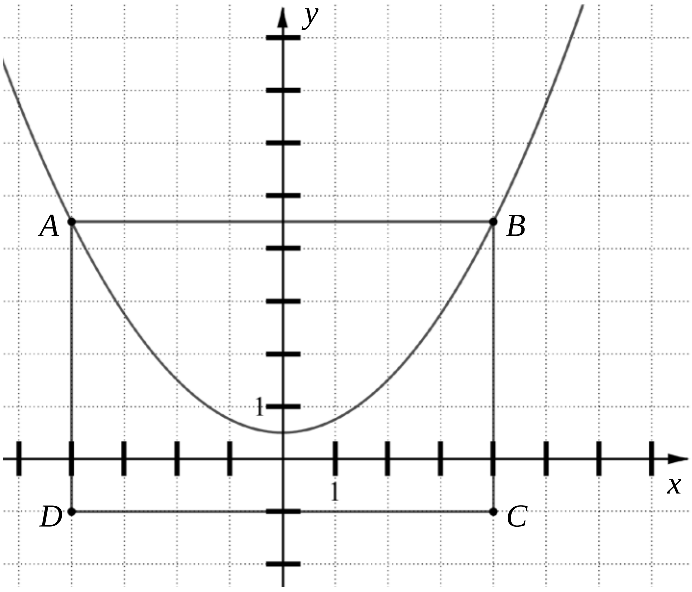
$4\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right) = 3x+6 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ (1 pont)

Az egyenlet két gyöke $x_1 = 4$ és $x_2 = -1$. (1 pont)

Az egyik metszéspont koordinátái: $\boldsymbol{P\left(4;\frac{9}{2}\right)}$. (1 pont)

A másik metszéspont koordinátái: pedig $\boldsymbol{Q}\left(\mathbf{-1;\frac{3}{4}}\right)$. (1 pont)

b) Először kiszámoljuk a parabola és az x tengely által bezárt területet a $[-4;4]$ intervallumon.



$$\int_{-4}^{4}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}dx=\left[\frac{x^3}{12}+\frac{x}{2}\right]_{-4}^{4}=\frac{4^3}{12}+\frac{4}{2}-\frac{(-4)^3}{12}-\frac{(-4)}{2}=\frac{44}{3}$$ (1 pont)

A parabola alá eső terület az x tengely alatt: $1\cdot 8=8$ (1 pont)

A parabola feletti terület, amely a téglalapon belülre esik

$T_{\text{jó}}=8\cdot 5,5-\frac{44}{3}-8=\frac{64}{3}$. (1 pont)

A teljes téglalap területe: $T_{\text{összes}}=8\cdot 5,5=44$ (1 pont)

Geometriai valószínűséggel számolva:

$$P=\frac{\frac{64}{3}}{44}=\frac{16}{33}=0,4848$$ (1 pont)

A valószínűsége, hogy a parabola fölé kerül a pont **0,4848**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

Maximális elérhető pontszám: 51 pont

5. Legyen adott egy 8 pontú teljes gráf, melynek minden élét beszínezzük pirosra, kékre vagy zöldre. Így végül 8 élét pirosra, 5-öt kékre, a maradékot pedig zöldre színeztük. (A gráf pontjait megkülönböztetjük!)

a) Hányféle különböző színezést kaphatunk? Adja meg, hogy milyen kombinatorikai problémáról van szó (permutáció, variáció, kombináció)! (3 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz olyan kör a gráfban, melynek minden éle kék? (7 pont)

A 12.b osztály diákjai körmérkőzéses kő-papír-olló versenyt rendeztek egymás között. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Az eredmények érdekesen alakultak: a résztvevők közül bármely két játékoshoz volt egy olyan játékos, akit mindketten legyőztek.

c) Legalább hányan vettek részt a versenyben? Ábrázoljon gráffal egy lehetséges beosztást! (6 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) Összesen $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ él van, így $28-8-5=15$ élt színeztünk zöldre. (1 pont)

A színezések számát **ismétlés nélküli kombinációval** kapjuk meg. (1 pont)

$\binom{28}{8}\binom{20}{5}\binom{15}{15}=\mathbf{4{,}82\cdot 10^{10}}$. (1 pont)

<u>Alternatív megoldás</u>:

Összesen $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ él van, így $28-8-5=15$ élt színeztünk zöldre. (1 pont)

A színezések számát **ismétléses permutációval** kapjuk meg. (1 pont)

$\frac{28!}{8!\cdot 5!\cdot 15!}=\mathbf{4{,}82\cdot 10^{10}}$ (1 pont)

b) Olyan kör, melynek minden éle kék állhat 3, 4 vagy 5 élből.

Ha 3 élből áll $\Rightarrow \binom{8}{3}\binom{25}{8}\binom{17}{15}=8237275200$. (1 pont)

(8 pontból 3-at kiválasztunk, az ezeket összekötő élek alkotják a kék kört, majd a maradék 25 élből kiválasztjuk a 8 pirosat és utána a maradék 17 élből a 15 zöldet. Az utolsó két él kék lesz, mert a többi színből nem maradt több.)

Ha 4 élből áll $\Rightarrow 3\cdot\binom{8}{4}\binom{24}{8}\binom{16}{15}=2471182560$, (1 pont)

ahol $3=\frac{4!}{4\cdot 2}$ azt jelöli, ha 8 pontból 4-et kiválasztunk, akkor 3 különböző kör képezhető.

(1 pont)

Ha 5 élből áll $\Rightarrow 12\cdot\binom{8}{5}\binom{23}{8}\binom{15}{15}=329491008$, (1 pont)

ahol $12=\frac{5!}{5\cdot 2}$ azt jelöli, ha 8 pontból 5-öt kiválasztunk, akkor 12 különböző kör képezhető.

(1 pont)

$\frac{8237275200+2471182560+329491008}{4{,}82\cdot 10^{10}}=0{,}2291$. (1 pont)

A keresett valószínűség **0,2291**. (1 pont)

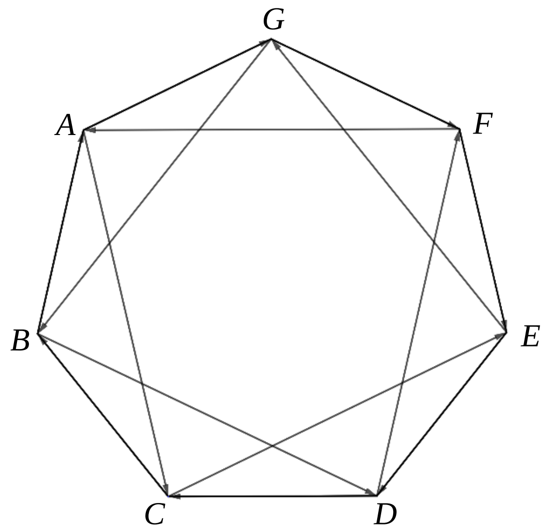
c) Tegyük fel, hogy A játékos legyőzte B játékost.
A és B játékos mindketten legyőzték C játékost.
A és C játékos esetén is lennie kell olyan játékosnak, akit mindketten legyőztek, mivel ez nem lehet B, legyen D.
Így láthatjuk, hogy minden játékoshoz kell lennie legalább 3 másik játékosnak, akit legyőztek.
(1 pont)

A mérkőzések számára felírható az egyenlőtlenség, miszerint $3n \le \frac{n(n-1)}{2}$. (1 pont)

Tehát $n(n-7) \ge 0$, ami miatt $n \le 0$ vagy $7 \le n$. Mivel n a gyerekek száma $n \le 0$ egyenlőtlenség nem fog jó megoldást adni. (1 pont)

Legalább 7-en vettek részt a versenyben. (1 pont)

Helyes ábra:



(2 pont)

Összesen: 16 pont

6. Máténak 3 darab fikusza van. Egyik nap unalmában megszámolta, hány levele van a fikuszainak. Arra jött rá, hogy a három fikuszon levő levelek számai egy mértani sorozatot alkotnak, és szorzatuk 1728. Ha levágna a legtöbb levelű fikusz leveleiből 8-at, majd ebből 2-t a legkevesebb levelű fikuszra ragasztana, egy számtani sorozatot kapna.

a) Hány levél volt az egyes fikuszokon? Mennyi a számtani sorozat differenciája? (7 pont)

Máté elég sok időt tölt a növények gondozásával. Mindig egyszerre több fikusszal foglalkozik. Naponta a növényekre szánt idejének 70%-ában az elsővel 60%-ában a másodikkal, 90%-ában pedig a harmadikat gondozza. Így pontosan 5 percet foglalkozik mindhárom fikusszal.

b) Hány percet tölt a növények gondozásával naponta Máté? (3 pont)

Máté kedvenc fikuszára kiemelten figyel, így nyitott egy bankszámlát, hogy a növény minden költségét fedezni tudja. Egy éven keresztül minden hónap elején 1000 Ft-ot tesz a számlára, majd a következő évben minden hónap első napján ellátogat a virágboltba, és 250 Ft-ért különleges trágyát, 150 Ft-ért új kitámasztó pálcát vesz a fikuszának, valamint 100 Ft-ért egy szál virágot anyukájának, a bankszámlán levő pénzből. A második év végére a fikusz olyan nagyra nő, hogy muszáj Máténak átültetnie egy új cserépbe, ezért a számlán levő összes pénzéből új cserepet vásárol.

c) Mennyi pénzért vett új cserepet Máté, ha a havi kamat 5%? (A kamatfizetés mindig a hó végén esedékes.) (6 pont)

Megoldás:

a) A három fikuszon levő levelek számát jelölje b_1, b_2 és b_3, mely egy mértani sorozat 3 egymást követő eleme.

$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 1728 \Rightarrow \frac{b_2}{q} \cdot b_2 \cdot b_2 \cdot q = 1728 \Rightarrow$ (1 pont)

$\Rightarrow b_2^3 = 1728$, tehát $b_2 = 12$. (1 pont)

Tudjuk még, hogy $b_1 + 2$, b_2 és $b_3 - 8$ egy számtani sorozatot alkot, és egy számtani sorozat második tagja meghatározható az első és a harmadik számtani átlagaként,

$12 - \frac{12}{q} - 2 = 12q - 8 - 12 \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0$. (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $q_1 = 2$ és $q_2 = \frac{1}{2}$. (1 pont)

A $q_2 = \frac{1}{2}$ nem ad jó megoldást, hiszen ekkor a harmadik fikusz 6 leveléből 8-at vágunk le, ami nem lehetséges. (1 pont)

A három fikuszon rendre $\frac{12}{2} = \mathbf{6}$, **12** és $12 \cdot 2 = \mathbf{24}$ levél volt. (1 pont)

A számtani sorozat differenciája $12 \cdot 2 - 8 - 12 = \mathbf{4}$. (1 pont)

b) Összesen x percet tölt a fikuszok gondozásával.
$0{,}7x$ ideig foglalkozik az elsővel, $0{,}6x$ ideig a másodikkal és $0{,}9x$ ideig a harmadikkal.
Pontosan két növénnyel összesen $\frac{0{,}7x - 5 + 0{,}6x - 5 + 0{,}9x - 5}{2} = \frac{2{,}2x - 15}{2}$ ideig foglalkozott.

(1 pont)

Összesen a növényeivel $\frac{2{,}2x - 15}{2} + 5$ ideig foglalkozott. (1 pont)

$$\frac{2,2x-15}{2}+5=x$$

Tehát a növényeivel összesen **25** percet foglalkozik naponta. (1 pont)

c) Ha egy évig minden hónap elején félretesz 1000 Ft-ot, év végére

$\left(\left(1000\cdot 1,05+1000\right)\cdot 1,05+1000\right)\cdot 1,05...=$ (1 pont)

$1000\cdot\left(1,05^{12}+1,05^{11}+...+1,05\right)=$ (1 pont)

$1000\cdot 1,05\cdot\frac{1,05^{12}-1}{1,05-1}=16712,98\text{ Ft}$ (1 pont)

Következő évben minden hónap elején 500 Ft-ot vesz ki, majd hónap végén adódik hozzá a kamat.

$\left(\left(\left(16712,98-500\right)\cdot 1,05-500\right)\cdot 1,05-500\right)...=$ (1 pont)

$16712,98\cdot 1,05^{12}-500\left(1,05^{11}+1,05^{10}+...+1,05\right)=$

$30014,11597-500\left(1,05\cdot\frac{1,05^{12}-1}{1,05-1}\right)=21657,62\text{ Ft}$ (1 pont)

Tehát **21657 Ft**-ért vett cserepet Máté a fikuszának. (1 pont)

Összesen: 16 pont

7. Egy csokoládégyárban 4 fogaskerék hajtja a csokikeverő gépezetet. (A fogaskerekek tökéletesen kör alakúak.)

a) Bizonyítsa be az alábbi állítást! (3 pont)

„Ha négy kör mindegyike 2-2 másikat kívülről érint, akkor a négy kör érintési pontjai egy körön vannak."

b) Fogalmazza meg az a) részben szereplő állítás megfordítását, majd az így kapott állítást tagadja! (2 pont)

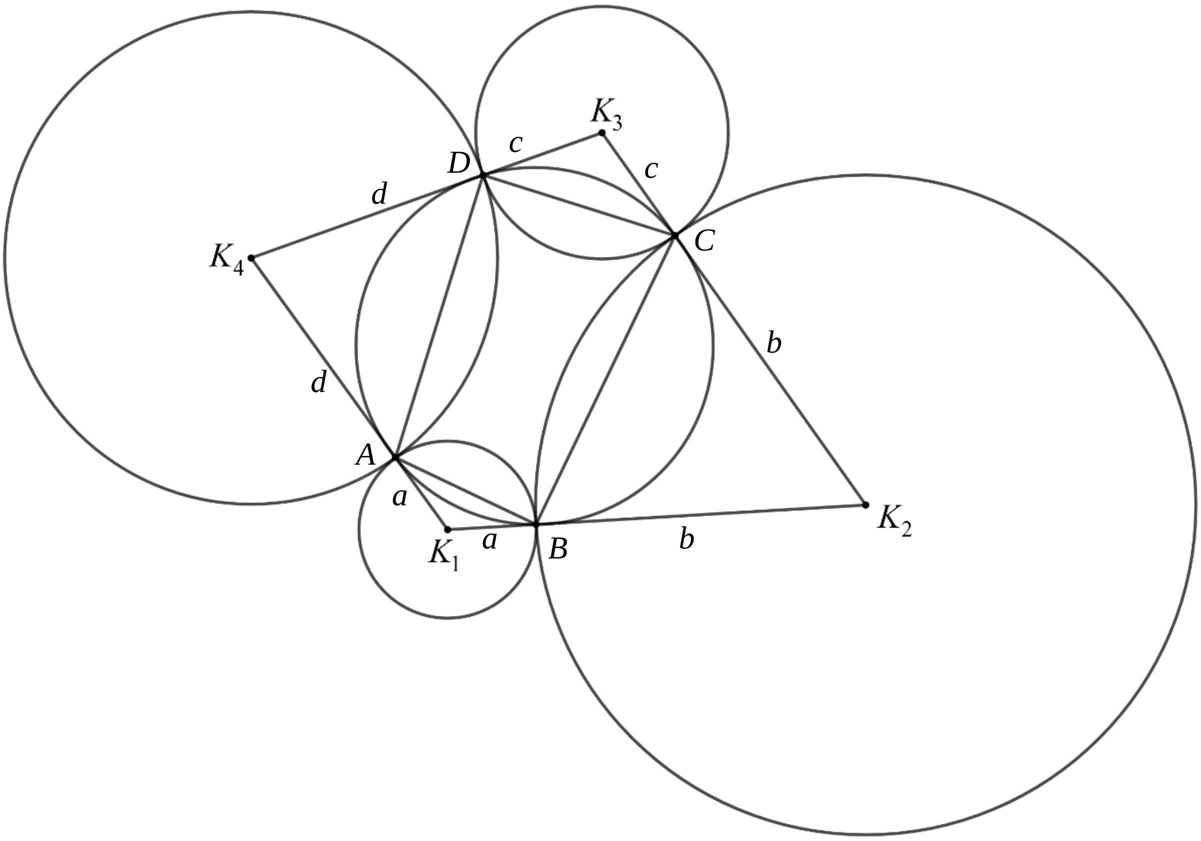
c) Igazold igazságtáblával, hogy $(A \to B) \to C \equiv [(\neg A) \to C] \wedge [B \to C]$! (5 pont)

Egy másik gépben ugyanígy 4 fogaskerék van, csak más méretűek. A négy fogaskerék középpontjait összekötve, egy szimmetrikus trapézt kapunk. Ha az *A* fogaskerék sugara 5 cm, *C* fogaskerék sugara pedig 3 cm.

d) A fogaskerekek területének hány százaléka esik a szimmetrikus trapézon kívül? (6 pont)

<u>Megoldás:</u>

a)



A szemben levő oldalak összege $a+b+c+d=a+b+c+d$ egyenlő. (1 pont)
Emiatt a körök középpontjai egy érintőnégyszöget alkotnak. (1 pont)
Mivel adott külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, így az *ABCD* négyszög köré írt kör érinti a négy kör érintési pontjait. **Emiatt a négy kör érintési pontjai egy körön vannak.** (1 pont)

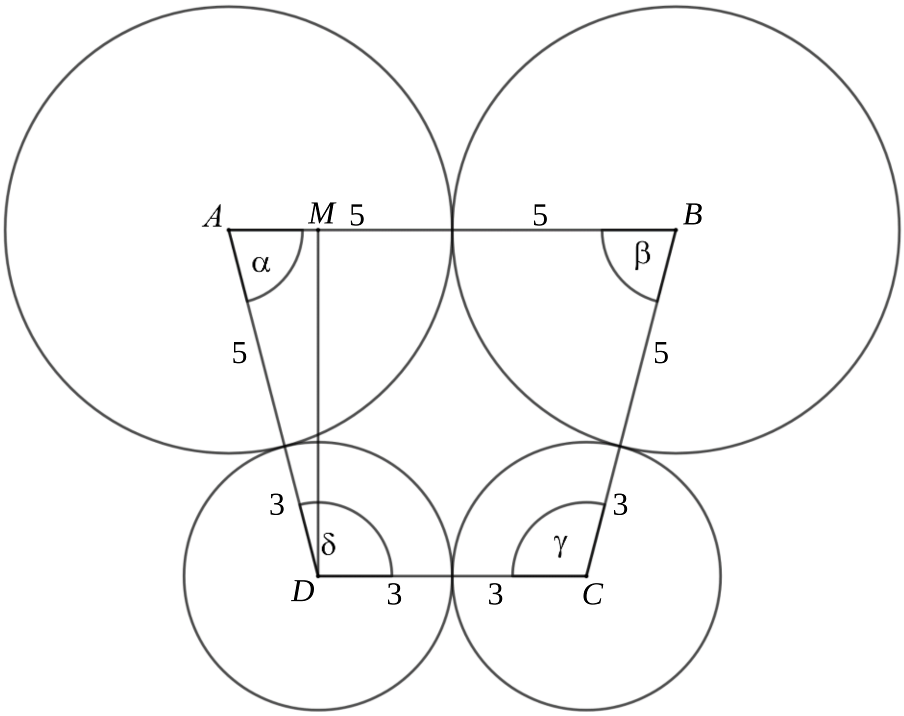
b) A mondat megfordítása: **„Ha a négy kör érintési pontjai egy körön vannak, akkor a négy kör mindegyike 2-2 másikat kívülről érint."** (1 pont)
Ennek a mondatnak a tagadása: **„Négy kör érintési pontjai egy körön vannak, és a négy körből van olyan, amely nem érint 2-2 másikat kívülről."** (1 pont)

c)

A	B	C	$A\to B$	$(A\to B)\to C$	$\neg A$	$\neg A\to C$	$B\to C$	$(\neg A\to C)\wedge(B\to C)$
I	I	I	I	I	H	I	I	I
I	H	I	H	I	H	I	I	I
H	I	I	I	I	I	I	I	I
H	H	I	I	I	I	I	I	I
I	I	H	I	H	H	I	H	H
I	H	H	H	I	H	I	I	I
H	I	H	I	H	I	H	H	H
H	H	H	I	H	I	H	I	H

(5 pont)

d) A trapéz oldalai $AB=5+5=10$, $CD=3+3=6$ és $BC=DA=5+3=8$.



$AMD_\triangle$-ben $AM=\frac{10-6}{2}=2$, így $\cos\alpha=\frac{2}{8}\Rightarrow\alpha=75{,}5225^\circ$. (1 pont)

Mivel tudjuk, hogy egy szimmetrikus trapéz azonos alapon fekvő szögei egyenlők, valamint azonos száron fekvő szögei 180°-ra egészítik ki egymást, a trapéz szögei $\beta=\alpha=75{,}5225^\circ$ és $\gamma=\delta=180^\circ-75{,}5225^\circ=104{,}4775^\circ$. (1 pont)

A körök területe:

$T_A=T_B=5^2\cdot\pi$, valamint $T_C=T_D=3^2\cdot\pi$. (1 pont)

Összesen a kilógó terület:

$$T_{ki}=2\cdot 5^2\cdot\pi\cdot\frac{360^\circ-75,5225^\circ}{360^\circ}+2\cdot 3^2\cdot\pi\cdot\frac{360^\circ-104,4775^\circ}{360^\circ}=39,51\pi+12,78\pi=$$

$=52,29\pi\approx 164,26\text{ cm}^2$ (1 pont)

A kilógó terület a körök teljes területének $\frac{52,29\pi}{2\cdot\left(5^2+3^2\right)\pi}=\frac{52,29}{68}=0,7689$-ed része. (1 pont)

A fogaskerekek területének **76,89 %**-a esik a szimmetrikus trapézon kívülre. (1 pont)

Összesen: 16 pont

8. A csokigyárban olyan egyenes hasáb alakú csokoládékat gyártanak, melyeknek alapja egy derékszögű háromszög, aminek az átfogójához tartozó magasság az átfogót egy 4 cm-es és egy 12 cm-es darabra osztja. A hasáb magassága 1,5 cm. Egy napon a gyártósor meghibásodott, és minden tábla csokoládéból levágott a derékszögű csúccsal szemközti lappal párhuzamosan egy darabot. A levágott lap alaplapjának kerülete $\frac{4\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}$ cm.

a) Mekkorák az eredeti csokoládé alapháromszögének befogói és az átfogóhoz tartozó magassága? (3 pont)

b) Mekkora a meghibásodott gyártósoron gyártott csokik térfogata? (8 pont)

c) A hiba miatt a cég által gyártott csokik 25%-os valószínűséggel kisebb méretűek lettek. Tomi, hogy meglepje édesszájú anyukáját, 7 darab csokoládét vásárolt neki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 jó méretű csokoládét vásárolt? (5 pont)

Megoldás:

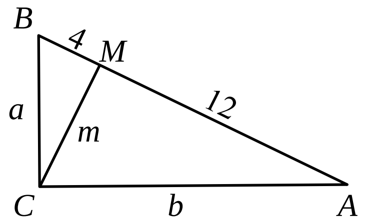
a) A befogótétel miatt:

$a=\sqrt{4\cdot(4+12)}=\mathbf{8}$ cm (1 pont)

$b=\sqrt{12\cdot(4+12)}=\mathbf{8\sqrt{3}}$ cm (1 pont)

A Pitagorasz-tétel alapján az $BMC\triangle$-ben:

$m=\sqrt{8^2-4^2}=\mathbf{4\sqrt{3}}$ **cm** (1 pont)

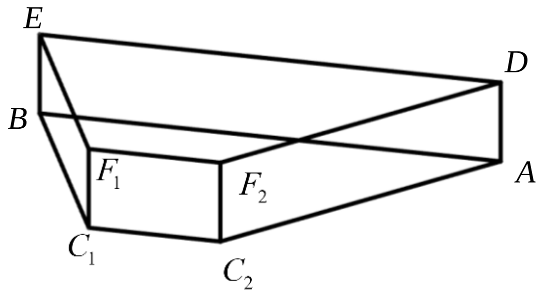


b) Az eredeti csoki alapháromszögének kerülete

$K_{\text{eredeti}}=16+8+8\sqrt{3}=8\left(3+\sqrt{3}\right)$. (1 pont)

Mivel a levágott darab alapháromszöge hasonló az eredeti csoki alapháromszögéhez kiszámolhatjuk a hasonlósági arányt.

$\lambda=\frac{\frac{4}{3}\left(3+\sqrt{3}\right)}{8\left(3+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{6}$. (1 pont)



Az eredeti csoki térfogata $V_{\text{eredeti}}=\frac{16\cdot 4\sqrt{3}}{2}\cdot 1,5=48\sqrt{3}\text{ cm}^3$. (2 pont)

A levágott csokidarabról tudjuk, hogy alapháromszögének minden oldala $\frac{1}{6}$-a az eredeti háromszög oldalainak, magassága viszont nem változott. Emiatt térfogata az eredeti csokoládé térfogatának λ^2-szerese. (1 pont)

A levágott csokoládé térfogata $V_{\text{levágott}} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 48\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$. (1 pont)

$V_{\text{hibás}} = 48\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{140}{3}\sqrt{3} \approx 80,83 \text{ cm}^3$ (1 pont)

A meghibásodott gyártósoron gyártott csokik térfogata **80,83 cm³**. (1 pont)

c) Ha legalább 3 jó méretű csokit vásárolt egyszerűbb a komplementer eseményt kiszámolni, azaz a rossz eseteket, azaz azt, hogy 0, 1 vagy 2 jó csokit vett. (1 pont)
Binomiális eloszlással számolva:

A valószínűsége, hogy 0 jó méretű csokit vett $\binom{7}{0} \cdot 0,25^7 \cdot 0,75^0 = 0,25^7$. (1 pont)

A valószínűsége, hogy 1 jó méretű csokit vett $\binom{7}{1} \cdot 0,25^6 \cdot 0,75^1 \approx 0,0013$. (1 pont)

A valószínűsége, hogy 2 jó méretű csokit vett $\binom{7}{2} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75^2 \approx 0,0115$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy Tomi legalább 3 jó méretű csokit vásárolt
$1 - 0,25^7 - 0,0013 - 0,0115 = \mathbf{0,9871}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

9. Kukutyin egy kis falu az Óperenciás tengeren is túl. Népességszáma mindössze 23 fő. A falu egy völgyben helyezkedik el, mely keresztmetszetének domborzatát az alábbi $f(x)=\left|12x-2x^2-10\right|$ függvény írja le.

a) Ábrázolja a derékszögű koordináta rendszerben a függvényt a $]0;\,7]$ intervallumon! **(2 pont)**

Kukutyin egyetlen benzinkútjának milliárd forintban megadott profitja az előző évben a következő függvény szerint alakult: $f(x)=-4\sin^2 x-(2+2\sqrt{3})\cos x+4+\sqrt{3}$.

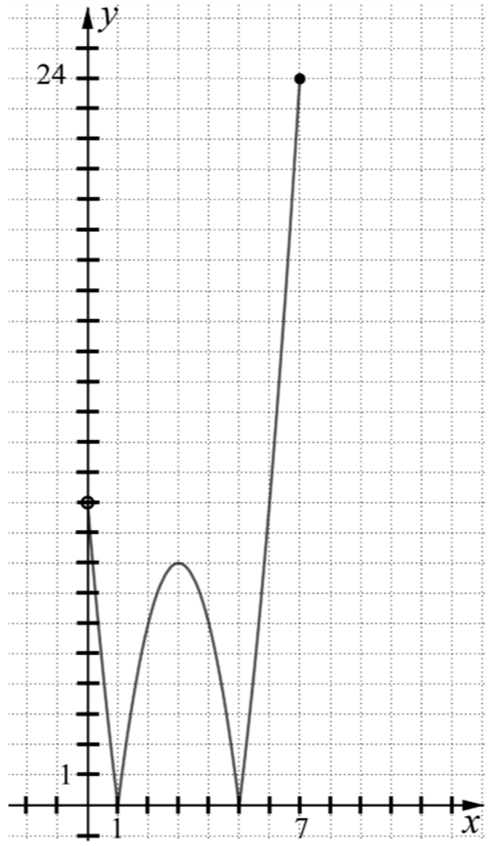
b) Az év hány százalékában volt veszteséges a benzinkút, ha egy évet a $]0;\,\pi[$ intervallumon értelmeznek a helyi közgazdászok? **(7 pont)**

Kukutyinban az autók fogyasztása elégé változó, ezt az $f(x)=3x^3-15x^2+8x+34$ függvény írja le, ahol x az autó években vett életkorát jelöli.

c) Mennyi idős autó átlagfogyasztása a legkedvezőbb és mennyi ez az átlagfogyasztás? (Az autó korát egész hónapra kerekítve adja meg!) **(7 pont)**

Megoldás:

a) $\left|12x-2x^2-10\right|=\left|-2(x-3)^2+8\right|$ (1 pont)



(1 pont)

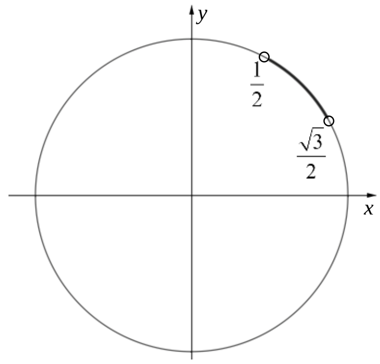
b) A trigonometrikus Pitagorasz-tétel alapján $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x$.

$4-4\sin^2 x-(2+2\sqrt{3})\cos x+\sqrt{3}=4\cos^2 x-\left(2+2\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{3}<0$ (1 pont)

Másodfokú megoldóképletet felhasználva az egyenlet két gyöke:

$\cos x_1=\dfrac{2+2\sqrt{3}+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1 pont)

$$\cos x_2 = \frac{2+2\sqrt{3}-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{8} = \frac{1}{2}$$ (1 pont)



Tehát $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, azaz (1 pont)

$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$. (1 pont)

Mivel az évet $[0;\ \pi]$ intervallumon értelmezzük $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.

(1 pont)

A benzinkút az év $\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{6}$ részében, azaz **16,67 %**-ban volt veszteséges. (1 pont)

c) $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 8x + 34$ függvény lokális minimumát keressük.

Ehhez vesszük a függvény első deriváltját: $f'(x) = 9x^2 - 30x + 8$. (1 pont)

$9x^2 - 30x + 8 = 0$ esetén lesz szélsőérték helye a függvénynek. (1 pont)

$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{17}}{3} \approx 0{,}2923$, $x_2 = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{17}}{3} \approx 3{,}0410$ (1 pont)

A második derivált alapján $f''(x) = 18x - 30$ a függvénynek x_1-ben maximuma $\left(f''(0{,}2923) = -24{,}74\right)$, x_2-ben pedig minimuma lesz $\left(f''(3{,}0410) = 24{,}74\right)$. (2 pont)

3,041 éves, azaz **36 hónapos** autó átlagfogyasztása a legkedvezőbb. (1 pont)

Ez az átlagfogyasztás $3\left(\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{17}}{3}\right)^3 - 15\left(\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{17}}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{17}}{3}\right) + 34 = \mathbf{3{,}98}$ egység.

(1 pont)

Összesen: 16 pont

Maximális elérhető pontszám: 64 pont

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 115 pont