PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA ●2019. február 16.

MATEMATIKA

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

KÖZÉPSZINT

JAVÍTÁSI – ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

2019. február 16.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

ATLASZ

ATLASZ

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

1. Tekintsük a következő két halmazt: $A=\{2;4;5;11;13\}$ és $B=\{1;4;5;7;11;15\}$. Elemei felsorolásával adja meg $A\cap B$ és $B\setminus A$ halmazokat! (2 pont)

Megoldás:

$A\cap B=\{4;5;11\}$ (1 pont)

$B\setminus A=\{1;7;15\}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$9^x=\frac{1}{3}$$ **(2 pont)**

Megoldás:

$9^x=9^{-\frac{1}{2}}$ (1 pont)

Az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, tehát az azonos alapok elhagyhatók.

$x=-\frac{1}{2}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

3. Egy forgáskúp alapjának átmérője 6 cm hosszú, magassága 4 cm. Számítsa ki a kúp térfogatát! Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (2 pont)

Megoldás:

$r=\frac{d}{2}$, tehát $r=3\text{cm}$. (1 pont)

$V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3}$, behelyettesítve: $\frac{3^2\cdot\pi\cdot 4}{3}=\mathbf{37{,}70\,cm^3}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

4. Egy öttagú társaságban mindenki öleléssel köszönt mindenkit. Hány ölelés maradt még hátra, ha eddig hatot számoltunk össze? (2 pont)

Megoldás:

Összes ölelések száma (n főre): $\frac{n(n-1)}{2}$

Behelyettesítve: $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ (1 pont)

Tehát $10-6=$ **4 ölelés van még hátra.** (1 pont)

Összesen: 2 pont

5. Egy háromszög két oldala 3 és 5 egység hosszúságú, az általuk közre zárt szög 60°. Mekkora a háromszög harmadik oldala? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (2 pont)

Megoldás:

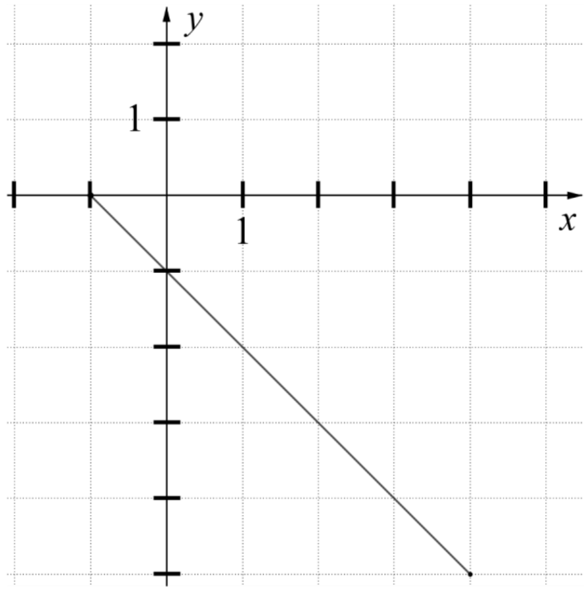
Írjuk fel a koszinusztételt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Behelyettesítve: $c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow c = \sqrt{34-15} = \sqrt{19}$ (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{c = \sqrt{19} = 4,36}$ egység. (1 pont)

Összesen: 2 pont

6. Az ábrán egy $[-1;4]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki, hogy az alábbiak közül melyik hozzárendelési szabály tartozik a függvényhez! (2 pont)



A: $\boldsymbol{a(x) = (x+2)+1}$ **B:** $\boldsymbol{b(x) = -(x+2)+1}$ **C:** $\boldsymbol{c(x) = -(x+2)-1}$ **D:** $\boldsymbol{d(x) = (x+2)-1}$

Megoldás:

Helyes válasz: **B:** $\boldsymbol{b(x) = -(x+2)+1}$ (2 pont)

7. Milyen számjegye(ke)t jelölhet az *X*, ha az alábbi négyjegyű szám osztható 15-tel?

$\overline{\mathbf{823}\boldsymbol{X}}$ **(3 pont)**

Megoldás:

Egy szám akkor osztható 15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel is.
Akkor lesz osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal.
Akkor lesz 5-tel osztható, ha 0-ra vagy 5-re végződik. (1 pont)
$8+2+3+0=13$, ez nem osztható 3-mal, tehát nem megoldás.
$8+2+3+5=18$, ami osztható 3-mal. (1 pont)
Tehát az ***X*** **helyére az 5-ös számjegy kerül.** (1 pont)

Összesen: 3 pont

8. Tagadja a következő ítéletet!

Van olyan holló, ami nem fekete. (2 pont)

Megoldás:

Minden holló fekete. (2 pont)

9. Adja meg az $A(1;6)$ és $B(-1;4)$ koordinátájú pontok által meghatározott szakasz felezőpontját! **(2 pont)**

Megoldás:

$A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok által meghatározott szakasz felezőpontja:

$F\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$

Behelyettesítve: $x=\frac{1+(-1)}{2}=0$ és $y=\frac{6+4}{2}=5$. (1 pont)

Tehát a keresett pont koordinátái: $\boldsymbol{F(0;5)}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

10. Egy kék és egy zöld dobókockával egyszerre dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy a dobott számok összege nem nagyobb mint 4? Válaszát négy tizedesjegyre kerekítve adja meg! **(4 pont)**

Megoldás:

6 db kedvező eset van:

$1+1$

$1+2$

$2+1$

$2+2$ (2 pont)

$1+3$

$3+1$

Összes eset száma: 6^2 (1 pont)

A klasszikus valószínűségi modell alapján:

$P=\frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}}=\frac{6}{36}=0{,}1667$

Tehát **0,1667** a keresett valószínűség. (1 pont)

Összesen: 4 pont

11. Oldja meg az alábbi egyenlőséget a $[-\pi;\pi]$ intervallumon!

$$\cos x=\frac{1}{2}$$ **(3 pont)**

Megoldás:

2 megoldásunk van:

I. $x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (1 pont)

II. $x_2=\frac{5\pi}{3}+2l\pi,\ l\in\mathbb{Z}$ (1 pont)

Ezek közül az intervallumon értelmezett megoldások:

$\boldsymbol{x_1=\frac{\pi}{3}}$ **és** $\boldsymbol{x_2=-\frac{\pi}{3}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

12. Egy számtani sorozat első tagja 3, ötödik tagja 19. Számítsa ki a sorozat első tíz tagjának összegét! (4 pont)

Megoldás:

A számtani sorozatok n-edik tagjának képlete: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Az ötödik tagra alkalmazva: $a_5 = 19 = a_1 + 4d$ (1 pont)

Az első tagot behelyettesítve az egyenletbe megkapjuk a differenciát.
$19 = 3 + 4d \Rightarrow d = 4$ (1 pont)

Az első n tag összege: $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d}{2}$

Tehát $S_{10} = 10 \cdot \frac{3+3+9 \cdot 4}{2} =$ **210**. (2 pont)

Összesen: 4 pont

Maximális elérhető pontszám: 30 pont

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!

13. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\mathbf{4^x + 2^{x+1} = 3}$ **(6 pont)**

b) $\mathbf{4\cos^2 x + 8\sin x + 1 = 0}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A hatványozás azonosságai alapján elvégezzük az átalakításokat.

$4^x = \left(2^2\right)^x = \left(2^x\right)^2$

$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ (1 pont)

Egy oldalra rendezzük az egyenletet.

$\left(2^x\right)^2 + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$ (1 pont)

Új ismeretlent vezetünk be: $2^x = a \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0$

A másodfokú egyenletet megoldva a két gyök: $a_1 = 1$ és $a_2 = -3$. (1 pont)

Mivel $2^x \geq 0$, így $a = -3$ nem vezet valós megoldáshoz. (1 pont)

$2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt az azonos alapok elhagyhatók. (1 pont)

Tehát $\mathbf{x = 0}$. (1 pont)

b) A trigonometrikus Pitagorasz-tételt $\left(\cos^2 x + \sin^2 x = 1\right)$ felhasználva átalakítjuk az egyenletet:

$4 - 4\sin^2 x + 8\sin x + 1 = 0$. (1 pont)

Új ismeretlent (a) vezetünk be a $\sin x$ helyére és rendezzük az egyenletet.

$4a^2 - 8a - 5 = 0$. (1 pont)

A másodfokú egyenlet megoldóképletébe behelyettesítve megoldjuk az egyenletet, melynek két gyöke:

$a_1 = \frac{5}{2}$ és $a_2 = -\frac{1}{2}$ (1 pont)

Az $\frac{5}{2}$ nem megoldása az egyenletnek, mivel $-1 \leq \sin x \leq 1$. (1 pont)

Megoldjuk a $\sin x = -\frac{1}{2}$ egyenletet.

$\mathbf{x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi}$ **és** $\mathbf{x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi}$**, ahol** $\mathbf{k, l \in \mathbb{Z}}$ (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

Összesen: 12 pont

14. Az *ABC* derékszögű háromszög hosszabbik befogója 32 dm, a rövidebb befogóhoz tartozó átfogóra eső merőleges vetület pedig 14,4 dm hosszú.

a) Mekkora a háromszög átfogójához tartozó magasság és az ismeretlen befogó hossza? (5 pont)

b) Számítsa ki a háromszög köré írható körének a területét! Válaszát $\mathbf{cm^2}$-ben adja meg! (3 pont)

A *DEF* háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz, a körülírt köre $\mathbf{25\pi\ dm^2}$ területű.

c) Milyen hosszúságúak a *DEF* háromszög befogói? Válaszát cm-ben adja meg! (4 pont)

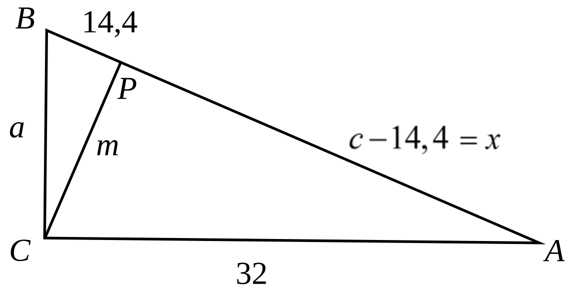
Megoldás:

a) Az ismert befogóra felírjuk a befogótételt.

$\sqrt{c\cdot(c-14,4)}=32 \Rightarrow c^2-14,4c-32^2=0$ (1 pont)

A másodfokú egyenletet megoldva a két gyök: $c_1=40$ dm és $c_2=-25,6$ dm (1 pont)

Ebből csak a $c=40$ dm jó megoldás, mivel az átfogó hossza nem lehet negatív.



A Pitagorasz tételt felírva megkapjuk a másik befogót.

$a^2+32^2=40^2$ (1 pont)

$a=24$

A magasságtétel segítségével kiszámoljuk a magasságot.

$\sqrt{14,4\cdot(40-14,4)}=m$ (1 pont)

$m=19,2$

Tehát az ismeretlen befogó $\boldsymbol{a=24}$ **dm,** a magasság pedig $\boldsymbol{m=19,2}$ **dm.** (1 pont)

<u>Alternatív megoldás</u>:

Felírjuk a magasságtételt az $ABC\triangle$-re: $m=\sqrt{14,4\cdot x}\Rightarrow m^2=14,4\cdot x$ (1 pont)

Illetve a Pitagorasz-tételt $CPA\triangle$-re: $32^2=x^2+m^2$ (1 pont)

Az első egyenletből kifejezett m^2-et a második egyenletbe behelyettesítve egy másodfokú egyenletet kapunk: $0=x^2+14,4x-32^2$

Az egyenlet két gyöke az $x_1=25,6$ és az $x_2=-40$, amiből csak az első lesz jó megoldás.

A kapott eredményt visszahelyettesítve megkapjuk a magasságot.

$m=\sqrt{14,4\cdot 25,6}=19,2$ (1 pont)

Az ismeretlen befogót pedig a befogótétel segítségével számoljuk ki.

$a=\sqrt{14,4\cdot(14,4+25,6)}=24$ (1 pont)

Tehát az ismeretlen befogó $\boldsymbol{a=24}$ **dm,** a magasság pedig $\boldsymbol{m=19,2}$ **dm.** (1 pont)

b) A Thálesz-tétel alapján a háromszög köré írható körének átmérője (d) az átfogó lesz. (1 pont)

$r=\frac{d}{2}=20$ dm.

A kör területe: $T=r^2\pi=20^2\cdot\pi=1256,64$ dm^2. (1 pont)

Átváltva: $1256,637$ dm^2 $=$ **125663,7 cm^2**. (1 pont)

c) Az $r^2\pi=25\pi$ egyenletet rendezve megkapjuk, hogy a $DEF\triangle$ sugara 5 dm. (1 pont)

Ebből az arányossági tényező: $\lambda=\frac{5}{20}=0,25$. (1 pont)

A hasonlóság szerint a befogók hossza: $24\cdot 0,25=6$ dm és $32\cdot 0,25=8$ dm. (1 pont)

Átváltva cm-re: a $DEF\triangle$ befogói **60 és 80 cm** hosszúak. (1 pont)

Összesen: 12 pont

15. Anna és Balázs fel szeretnék újítani a lakásukat, ezért úgy döntenek, hogy bankba teszik a megtakarításukat.

a) Egy nagyon kedvező ajánlatot találnak, így végül kétszázezer forintot helyeznek el a bankban havi 7%-os kamatozással. Hány év elteltével kell kivenniük pénzüket, ha a felújításra legalább 1 000 000 forintot szánnak és a kamatot minden hónap végén írják jóvá? (5 pont)

b) Amíg sorban állnak a bankban, Anna egy fejtörőt ad fel Balázsnak: „Gondoltam 6 pozitív egész számra. Ezek átlaga 4, mediánjuk 5, a móduszuk pedig 6.” Számolja ki, mely számokra gondolt Anna! (7 pont)

Megoldás:

a) Jelöljük az eltelt hónapok számát *n*-nel!

A kamatos kamat képletét felírva: $200000 \cdot 1,07^n \geq 1000000$ (1 pont)

Rendezzük az egyenlőtlenséget: $1,07^n \geq 5$

Vegyük mindkét oldalnak 10-es alapú logaritmusát: $\lg 1,07^n \geq \lg 5$. (1 pont)

Logaritmus azonosságot alkalmazva, majd az egyenlőtlenséget rendezve:

$n \geq \dfrac{\lg 5}{\lg 1,07}$. (1 pont)

$n \geq 23,79$

Mivel a kamatot a hónap végén írják jóvá, ezért felfelé kerekítve 24 hónap, azaz **2 év múlva vehetik ki a pénzt a bankból.** (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

b) Jelöljük a számokat növekvő sorrendben $x_1; x_2; ...; x_6$-nak.

Anna páros számú számra gondolt, így a medián a középső két elem átlaga lesz.

$\dfrac{x_3 + x_4}{2} = 5$. (1 pont)

Ez nem lehet két darab 5-ös, mivel melléjük már csak két hatost lehetne tenni, de így nem a hatos lenne a módusz.

Hatosnál nagyobb szám se szerepelhet (pl. 7 és 3), mivel ekkor szintén nem lehet 6 a módusz.

Tehát a két középső elem egy 6-os és egy 4-es. (2 pont)

Mindenképpen szerepelnie kell még legalább egy hatosnak, hogy az legyen a leggyakoribb szám.

$x_5 = 6$. (1 pont)

Az eddig ismert számokkal írjuk fel az átlagot: $\dfrac{x_1 + x_2 + 4 + 6 + 6 + x_6}{6} = 4$ (1 pont)

$x_1 + x_2 + x_6 = 8$ és $0 \leq x_1,\ x_2 \leq 4$, valamint $x_6 \geq 6$. (1 pont)

A feltételeknek egyetlen számhármas felel meg: $1+1+6$.

Tehát a hat szám: **1, 1, 4, 6, 6, 6** (1 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 36 pont

II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16. Az óvodai farsangi mulatságon felfordított négyzet alapú csonkagúla formájú tálkákban tálalják fel a pudingot. A hosszabbik alapél 24 cm, a rövidebbik 12 cm hosszú, az oldalélek hossza pedig 10 cm. Egy adag puding a tálka 75 %-át tölti ki.

a) A pudingot 20 literes edényekben szállítják. Legalább hány darab ilyen edényt kell vásárolnia az óvodának, ha 12 csoport van összesen és minden csoportnak hat adag puding jut? (9 pont)

A farsangi „Ki mit tud?”-on 6 fiú és 6 lány szerepel.

b) Hányféleképpen állítható össze a produkciók sorrendje, ha a fiúk és lányok felváltva követik egymást a színpadon? (3 pont)

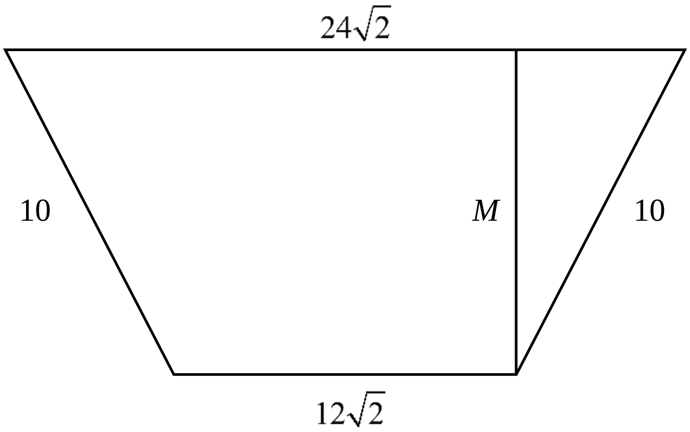
Az egyik csoportban 17 lány és 13 fiú van.

c) Ha véletlenszerűen kiválasztunk 5 gyereket, mennyi a valószínűsége, hogy közülük legfeljebb 3 fiú van? Válaszát négy tizedesjegy pontossággal adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) I. megoldás:

Az átlós keresztmetszettel egy trapézt kapunk, melynek a párhuzamos oldalai a csonkagúla alapjainak átlói, szárai pedig a csonkagúla oldalélei.



Az a oldalhosszúságú négyzet átlója $\sqrt{2}a$

Tehát a két párhuzamos oldal hossza:

$\sqrt{2}\cdot 12 = 16,97$ cm

$\sqrt{2}\cdot 24 = 33,94$ cm (2 pont)

A magasságot berajzolva az így keletkezett derékszögű háromszögre egy Pitagorasz-tétel írható fel.

$$10^2 = M^2 + \left(\frac{24\sqrt{2}-12\sqrt{2}}{2}\right)^2$$ (1 pont)

Az egyenletet rendezve: $M = \sqrt{100-72} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} = 5,29$ cm. (1 pont)

A csonkagúla alaplapjának és fedőlapjának területe: $12^2 = 144\text{ cm}^2$ és $24^2 = 576\text{ cm}^2$. (1 pont)

A csonkagúla térfogatának képletébe behelyettesítünk.

$$V = \frac{M\left(T+\sqrt{Tt}+t\right)}{3} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{7}\cdot\left(144+\sqrt{144\cdot 576}+576\right)}{3} =$$

$= 672\cdot\sqrt{7} = 1777,95\text{ cm}^3$. (1 pont)

A térfogat 75%-a literbe átváltva:

$1777,95\cdot 0,75 = 1333,46\text{ cm}^3 = 1,333\text{ dm}^3 = 1,333$ liter (1 pont)

A tizenkét csoport mindegyike hat tálat kap.

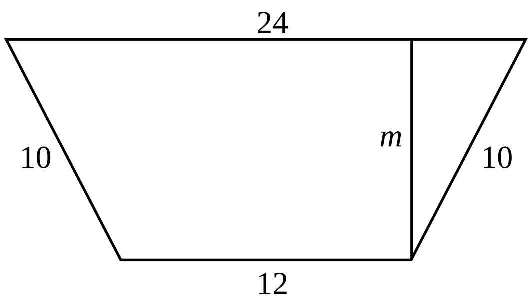
$1,333\cdot 6\cdot 12 = 95,976$ liter (1 pont)

$\frac{95,976}{20} = 4,8$, tehát **legalább 5 edényre van szükség.** (1 pont)

II. megoldás:

A magasságot a tengelymetszetből kapott trapézból számoljuk, ahol a trapéz párhuzamos oldalai egyenlőek a csonkagúla alap- és fedőlapjának oldalaival, az oldalélek pedig a csonkagúla oldallapjainak magassága.

A csonkagúla oldallapja egy trapéz, ahol a magasságot behúzva felírható a Pitagorasz-tétel.

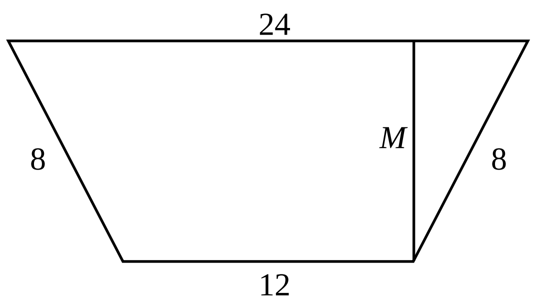


$$10^2 = m^2 + \left(\frac{24-12}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow m = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$

(2 pont)

A csonkagúla tengelymetszetére behúzva a magasságot egy újabb Pitagorasz-tétel írható fel:



$$8^2 = M^2 + \left(\frac{24-12}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow M = \sqrt{64-36} = \sqrt{28} =$

$= 2\sqrt{7} = 5,29$ cm

(2 pont)

Innen ugyanúgy folytatjuk, mint az I. megoldásban. (5 pont)

b) Először sorba állítjuk a fiúkat, ezt $6!$ féleképpen tehetjük meg. (1 pont)
A lányok szintén $6!$ féleképpen állíthatók sorba. (1 pont)
Ezután a lányokat berakjuk a fiúk közé, ezt kétféleképpen tehetjük meg, vagy lány az első szereplő vagy fiú.
Tehát az összes eset száma: $\mathbf{2\cdot 6!\cdot 6! = 1\,036\,800}$ (1 pont)

c) I. megoldás:
A csoportban összesen 30 gyerek van, ebből 5-öt $\binom{30}{5}$ féleképpen tudunk kiválasztani.
(1 pont)
Komplementer eseménnyel számolunk, azaz 4 vagy 5 fiút választunk ki.
4 fiú, 1 lány: $\binom{13}{4}\cdot\binom{17}{1} = 12\,155$
5 fiú, 0 lány: $\binom{13}{5}\cdot\binom{17}{0} = 1\,287$ (2 pont)
A komplementer valószínűség: $\overline{P} = \frac{12\,155+1\,287}{142\,506} = 0,09433$ (1 pont)
$P = 1-\overline{P} = \mathbf{0,9057}$ (1 pont)

II. megoldás:
Nem komplementerrel számolunk.
Az egyes események egymást páronként kizárják, így összeadás van közöttük.

$$P = \frac{\binom{13}{0}\binom{17}{5}+\binom{13}{1}\binom{17}{4}+\binom{13}{2}\binom{17}{3}+\binom{13}{3}\binom{17}{2}}{\binom{30}{5}} = \frac{129\,064}{142\,506} = \mathbf{0,9057}.$$ (5 pont)

Összesen:17 pont

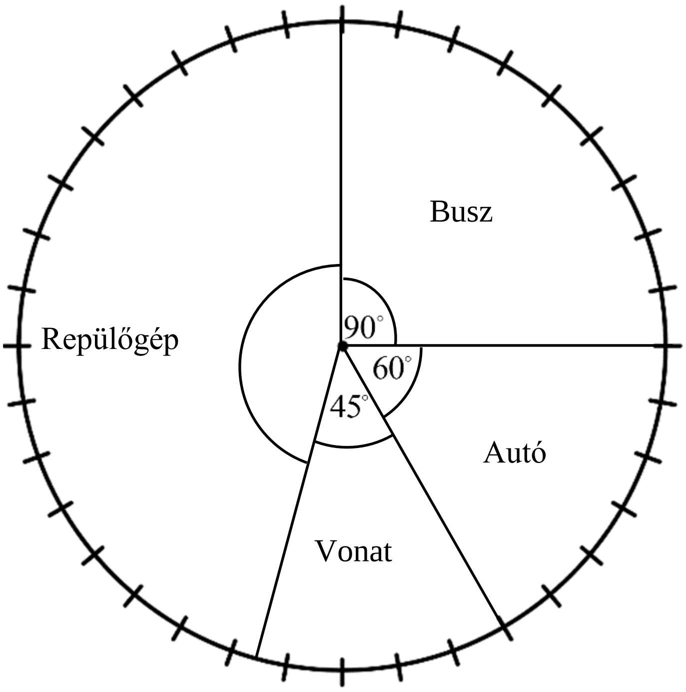
17. Egy 24 fős baráti társaság nyári utazást szervez és szavazással szeretnék eldönteni, hogy hova menjenek (egy ember több helyszínre is szavazhat). Az olasz tengerparti kirándulásra összesen 16-an tették fel a kezüket, a holland városnézésre 10-en jelentkeztek, a svájci hegyi túrára pedig 7 ember szavazott (ebbe beleszámolták azokat is, akik esetleg két vagy három lehetőségre is szavaztak). Három embernek mindegy volt, hogy Olaszországba vagy Hollandiába mennek, tehát csak erre a kettőre szavaztak, ugyanígy gondolkodva hárman adtak le szavazatot a tengerparti útra és a hegyi túrára is, egy fő pedig az olasz tengeren kívül mindkét útra leadta a voksát. 2-en teljesen döntésképtelenek voltak, így mindhárom utazásra feltették a kezüket.

a) Hányan tartózkodtak a szavazástól? (5 pont)

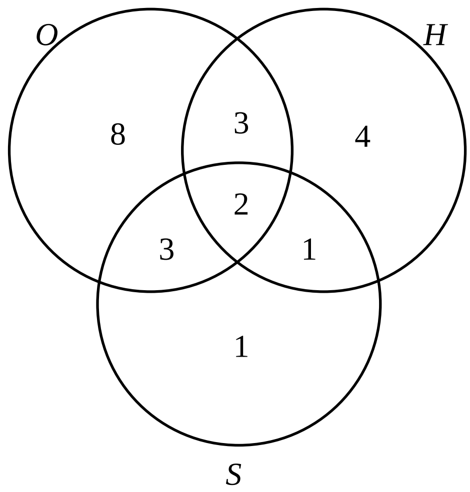
b) Balázs nagyon szerencsés, ezért 100-ból 78-szor eltalálja, hogy ki mire szavazott. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a társaság pontosan kétharmadának találja ki a szavazatát? (6 pont)

A szavazás eredményeképpen az olasz tengerpartra utazik a társaság nyáron. Az alábbi kördiagramon ábrázolták, hogy ki milyen járművel szeretne eljutni oda. (Mindenki csak egy járművet választhatott.) A diagram elkészítése után azonban 2 ember megváltoztatta a szavazatát, autó helyett inkább ők is repülővel utaznának.

c) Készítse el az új kördiagramot! (6 pont)



Megoldás:



a) Az adatokat felírva: $|O|=16$, $|H|=10$, $|S|=7$. (1 pont)

A feladat szövege alapján: $|(O\cap H)\setminus S|=3$, $|(O\cap S)\setminus H|=3$, $|(H\cap S)\setminus O|=1$, $|O\cap H\cap S|=2$ (1 pont)

Ezután kiszámoljuk a metszetek számosságát.

$|O\cap H|=3+2=5$

$|O\cap S|=3+2=5$

$|H\cap S|=1+2=3$ (1 pont)

(A Venn-diagram helyes felrajzolásáért is jár a 3 pont.)

Szita-formulába behelyettesítve: $16+10+7-5-5-3+2=22$. (1 pont)

A 24-ből csak 22 ember vett részt a szavazáson $\Rightarrow 24-22=2$.

Tehát 2 ember tartózkodott. (1 pont)

b) $P(\text{eltalálja})=0,78$, ekkor $1-P=P(\text{nem találja el})=0,22$. (2 pont)

$24\cdot\frac{2}{3}=16$ ember szavazatát kell eltalálnia. (1 pont)

Binomiális eloszlással számolva: $P(X=16)=\binom{24}{16}\cdot 0,78^{16}\cdot 0,22^{8}=0,0758$ (2 pont)

Tehát $\mathbf{0,0758}$ a keresett valószínűség. (1 pont)

c) Egy főhöz tartozó szög nagysága: $\frac{360^\circ}{24}=15^\circ$ (1 pont)

A repülőgépre a kördiagramban $360^\circ-(90^\circ+60^\circ+45^\circ)=165^\circ$ marad. (1 pont)

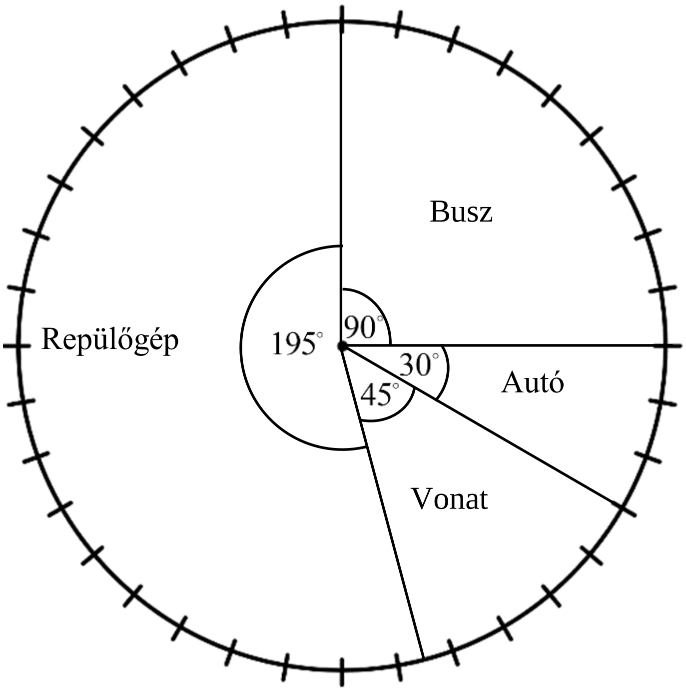
$\frac{165^\circ}{15^\circ}=11\Rightarrow$ 11 fő szavazott eredetileg a repülős utazásra. (1 pont)

$\frac{60^\circ}{15^\circ} = 4 \Rightarrow$ 4 fő pedig az autos útra. (1 pont)

A váltás után 13 fő szavazott a repülőre, 2 fő az autóra.

$13 \cdot 15^\circ = 195^\circ$ és $2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$. (1 pont)

Helyes diagram felrajzolása, feliratozása.



(1 pont)

Összesen:17 pont

18. Adott egy szakasz, amelynek végpontjai az $A(-2;0)$ és a $B(-6;8)$ pont.

a) Számítsa ki, hogy az *y* tengely mely pontjaiból látszik derékszögben az *AB* szakasz!

(8 pont)

A $C(3;12{,}5)$ koordinátájú pont az *A* és *B* ponttal egy háromszöget alkot.

b) Adja meg a *B* csúcsnál levő szög nagyságát! (5 pont)

c) Igazolja, hogy a $S(100;61)$ pont illeszkedik a *BC* egyenesre! (4 pont)

Megoldás:

a) Ha az *AB* szakaszra, mint átmérőre egy kört írunk, akkor a Thalész-tétel miatt a kör minden pontjából (a szakasz végpontjait kivéve) derékszög alatt látszik a szakasz. Tehát a megoldás a szakasz Thalész-körének és az *y* tengely közös pontjai.

(Akkor is jár a pont, ha a gondolatmenet csak a megoldásból derül ki.) (1 pont)

AB szakasz felezőpontja lesz a kör középpontja.

$F\left(\frac{-2+(-6)}{2}; \frac{0+8}{2}\right) \Rightarrow F(-4;4)$ (2 pont)

A és *F* pontok távolsága a sugár.

$|AF| = \sqrt{(-4-(-2))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20}$ (1 pont)

Ezekből a kör egyenlete: $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 20$ (1 pont)

A kör és az *y* tengely közös pontjait egyenletrendszer segítségével számoljuk ki.

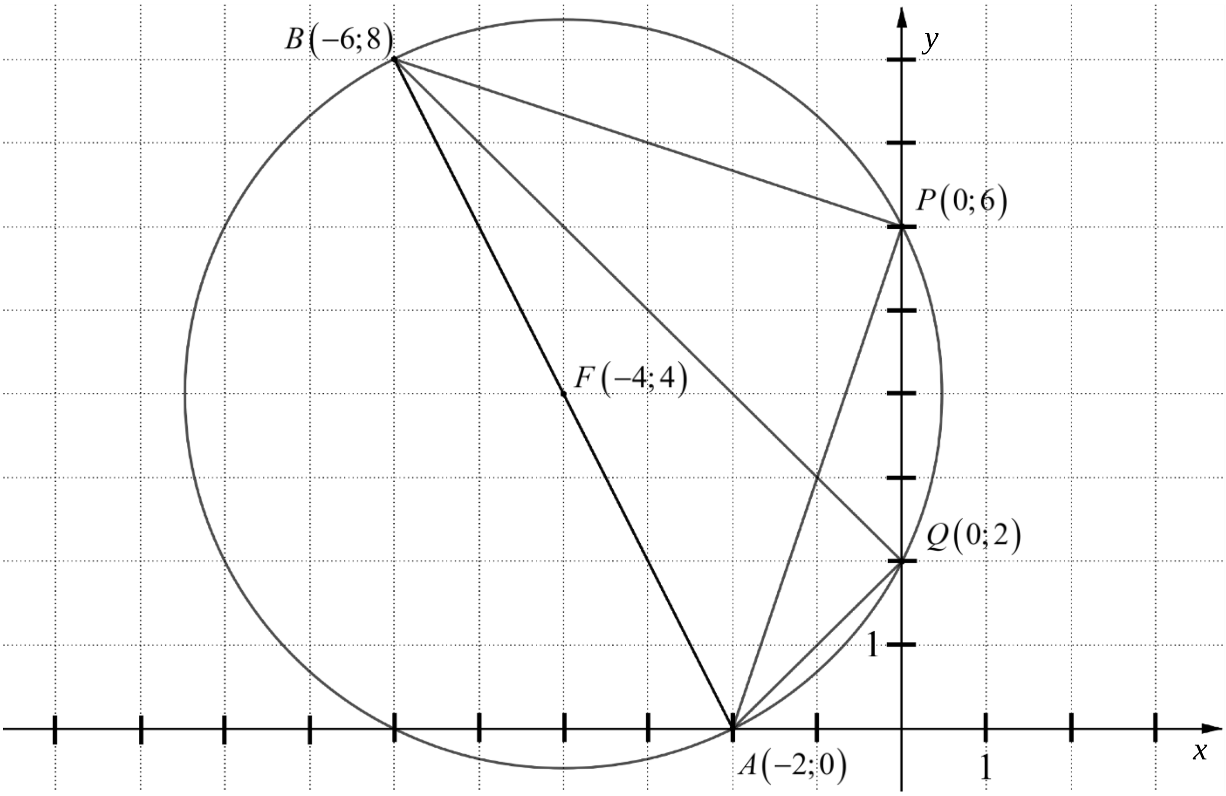
$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ (x+4)^2 + (y-4)^2 &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Behelyettesítjük az *x*-et, majd 0-ra rendezzük a másodfokú egyenletet.

$4^2 + y^2 - 8y + 16 = 20 \Rightarrow y^2 - 8y + 12 = 0$ (2 pont)

Az egyenlet két gyöke: $y_1 = 6$ és $y_2 = 2$.

Tehát a két pont: $\boldsymbol{P(0;6)}$ **és** $\boldsymbol{Q(0;2)}$. (1 pont)



b) *BC* és *BA* vektor: $\overrightarrow{BC}(9;4,5)$ és $\overrightarrow{BA}(4;-8)$. (1 pont)

Kiszámoljuk a két vektor hosszát:

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9^2 + 4,5^2} = \sqrt{101,25} = 10,06$

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 8,94$ (2 pont)

A skaláris szorzat képletébe behelyettesítve: $9 \cdot 4 + 4,5 \cdot (-8) = 10,06 \cdot 8,94 \cdot \cos\beta$

$\Rightarrow 0 = 89,9364 \cdot \cos\beta$ (1 pont)

Tehát $0 = \cos\beta \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Mivel β egy háromszög belső szöge, így az egyetlen megoldás a $\boldsymbol{\beta = 90^\circ}$. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Mindhárom vektor hosszát kiszámoljuk, ezzel megkapjuk a háromszög oldalait.

$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9^2 + 4,5^2} = \sqrt{101,25} = 10,06$

$c = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 8,94$

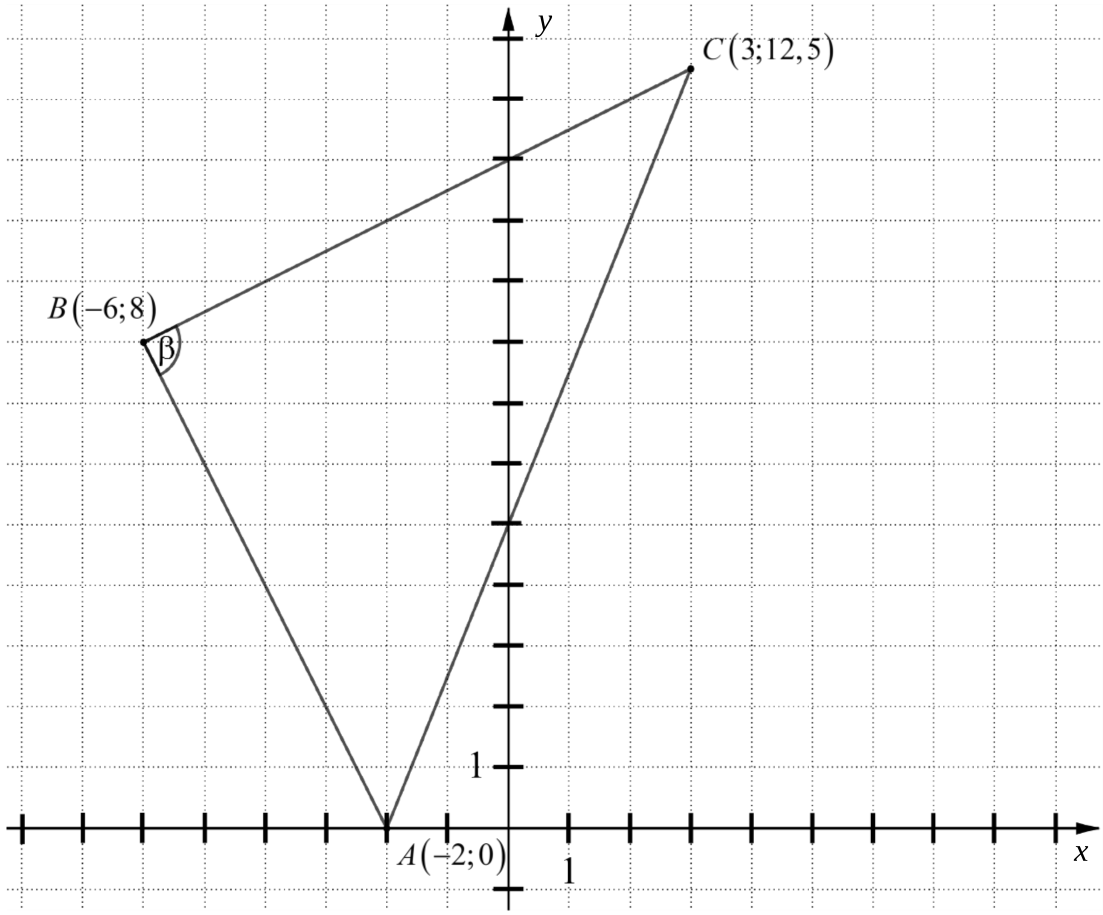
$b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 12,5^2} = \sqrt{181,25} = 13,46$ (3 pont)

A háromszög három oldalára felírjuk a koszinusztételt:

$\left(\sqrt{181,25}\right)^2 = \left(\sqrt{101,25}\right)^2 + \left(\sqrt{80}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{101,25} \cdot \sqrt{80} \cdot \cos\beta$

$0 = -180 \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = 0$ (1 pont)

Mivel β egy háromszög belső szöge, így az egyetlen megoldás a $\boldsymbol{\beta = 90^\circ}$. (1 pont)



c) Egy pont akkor illeszkedik egy egyenesre, ha az egyenes egyenletébe behelyettesítve fennáll az egyenlőség.

BC egyenes irányvektora: $\underline{v}(3-(-6);12,5-8) = \underline{v}(9;4,5) = \underline{v}'(2;1)$.

Ezt 90°-kal elforgatva megkapjuk a normálvektort: $\underline{n}(1;-2)$ (2 pont)

Ebből felírható az egyenes egyenlete:

$x - 2y = -22$ (1 pont)

Behelyettesítjük *S* koordinátáit az egyenletbe:

$100 - 2 \cdot 61 = 100 - 122 = -22$. (1 pont)

A két oldal egyenlő, tehát **a pont rajta van az egyenesen.**

Összesen: 17 pont

A szerezhető maximális pontszám: 34 pont

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 100 pont