Egyenletek, egyenlőtlenségek
Megoldások

1)

a) **Oldja meg a $7+x<-2\cdot(x-2)$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!** **(2 pont)**

b) **Oldja meg az $x^2+x-6\le 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!** **(4 pont)**

c) **Legyen az A halmaz a $7+x<-2\cdot(x-2)$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza, B pedig az $x^2+x-6\le 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza. Adja meg az $A\cup B$, $A\cap B$ és $B\setminus A$ halmazokat!** **(6 pont)**

Megoldás:

a) $7+x<-2\cdot(x-2)\Leftrightarrow 3x<-3$, (1 pont)

ahonnan $x<-1$. $(A=]-\infty;-1[)$ (1 pont)

b) Az $x^2+x-6=0$ egyenlet gyökei: $-3;2$ (2 pont)

Mivel a főegyüttható pozitív, (1 pont)

ezért $-3\le x\le 2$. $(B=[-3;2])$ (1 pont)

c) $A\cup B=]-\infty;2]$ (2 pont)

$A\cap B=[-3;-1[$ (2 pont)

$B\setminus A=[-1;2]$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

2) **Az $a=2$ és $b=-1$ esetén számítsa ki C értékét, ha $\frac{1}{C}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$!** **(2 pont)**

Megoldás:

$C=-2$ (2 pont)

3) **Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!**

$$\left.\begin{aligned} x\cdot y&=600\\ (x-10)\cdot(y+5)&=600\end{aligned}\right\}$$

(12 pont)

Megoldás:

$x=\frac{600}{y}$, ahol $y\neq 0$ (1 pont)

$xy+5x-10y=650$ (2 pont)

$600+\frac{3000}{y}-10y=650$

$3000-10y^2=50y$ (1 pont)

$y^2+5y-300=0$ (2 pont)

$y_1=15;\ y_2=-20$ (2 pont)

$x_1=40;\ x_2=-30$ (2 pont)

Ellenőrzés. (2 pont)

Összesen: 12 pont

4) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet: $-2x^2+13x+24=0$! (2 pont)

Megoldás:

Az egyenlet gyökei $-1,5$ és 8. (2 pont)

5)

a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$(x+2)^2-90=5\cdot(0,5x-17)$ (5 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán $\frac{3-x}{7x}<2$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

Megoldás:

a) A zárójelek felbontása: $x^2+4x+4-90=2,5x-85$ (1 pont)

$x^2+1,5x-1=0$ (1 pont)

$x_1=0,5,\ x_2=-2$ (2 pont)

A gyökök a valós számok halmazán megfelelnek. (1 pont)

b) $\frac{3-x}{7x}-2<0$ (1 pont)

$\frac{3-15x}{7x}<0$ (1 pont)

$3-15x>0$ és $7x<0$ (1 pont)

$\Rightarrow x<0$ (1 pont)

vagy $3-15x<0$ és $7x>0$ (1 pont)

$\Rightarrow x>0,2$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty;0[\cup]0,2;\infty[$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

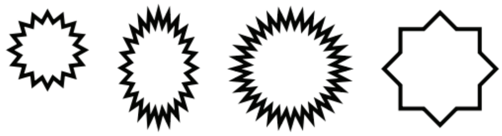
6) Ha az eredetileg $I_0\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugár x mm $(x\geq 0)$ mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x)=I_o\cdot 0,1^{\frac{x}{6}}\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ lesz. Ezt az anyagot $I_0=800\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!) (3 pont)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték I_0 15%-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!) (6 pont)

c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnyel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel? **(8 pont)**



Megoldás:

a)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800	713	635	505	450	357	253

(3 pont)

b) Megoldandó a $0,15 = 0,1^{\frac{x}{6}}$ egyenlet (ahol x a keresett távolság mm-ben mérve).

$\lg 0,15 = \frac{x}{6} \cdot 0,1$ (2 pont)

$x = 6 \cdot \frac{\lg 0,15}{\lg 0,1}$ (2 pont)

$x \approx 4,9$ (1 pont)

A lézersugár intenzitása kb. 4,9 mm mélységben csökken az eredeti érték **15%**-ára. (1 pont)

c) Minden csillag esetében három lehetőség van a megvilágításra: kék, zöld, nincs kirajzolva. (3 pont)

A különböző dekorációs tervek száma ezért: $3^4 = 81$. (4 pont)

Legalább egy csillagot ki kell rajzolni, így a lehetőségek száma $81 - 1 = 80$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

7) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\boldsymbol{x^2 - 25 = 0}$$ **(2 pont)**

Megoldás:

5; –5 (2 pont)

8) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\boldsymbol{x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}}$ **(5 pont)**

b) $\boldsymbol{-3x^2 - 1 \le -4}$ **(7 pont)**

Mindkét esetben ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen!

Megoldás:

a) $12x - 6\cdot(x-1) > 3\cdot(x-3) - 4\cdot(x-2)$ (1 pont)

$12x - 6x + 6 > 3x - 9 - 4x + 8$ (1 pont)

$6x + 6 > -x - 1$ (1 pont)

$7x > -7$ azaz $x > -1$ (1 pont)

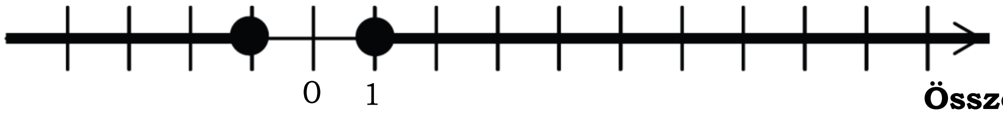
(1 pont)

b) $-3x^2 \le -3$ (1 pont)

$x^2 \ge 1$ (2 pont)

(Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza azoknak az x számoknak a halmaza, amelyekre teljesül) $x \ge 1$ (1 pont)

vagy $x \le -1$ (1 pont)



(2 pont)

Összesen: 12 pont

9) Mekkora az $x^2-6,5x-3,50$ egyenlet valós gyökeinek összege, illetve szorzata? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az egyenlet gyökei: 7 és –0,5. (2 pont)

A gyökök összege: **6,5**.

A gyökök szorzata: **–3,5**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

10) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5^{x+1}+5^{x+2}=30$ **(5 pont)**

b) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x+2}=1$**, ahol** $x \ne 0$ **és** $x \ne -2$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $5\cdot 5^x+5^2\cdot 5^x=30$ (1 pont)

$30\cdot 5^x=30$ (1 pont)

$5^x=1 \Rightarrow 5^x=5^0$ (1 pont)

Az 5 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $\boldsymbol{x=0}$ (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) Az egyenlet bal oldalát közös nevezőre hozva: $\dfrac{3(x+2)-2x}{x(x+2)}=1$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát $x(x+2)$-vel szorozva

$3(x+2)-2x=x(x+2)$ (1 pont)

A zárójelek felbontása és összevonás után: $x+6=x^2+2x$ (1 pont)

Nullára rendezve: $x^2+x-6=0$ (1 pont)

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1=-3;\ x_2=2$ (2 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 12 pont

11)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\dfrac{x+2}{3-x}\ge 0$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4\cdot 3^x+3^x=20$. (4 pont)

c) Oldja meg a $2\cos^2 x+3\cos x-2=0$ egyenletet a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

Megoldás:

a) Ha $x<3$, akkor ($3-x>0$, ezért) $x+2\geq 0$, vagyis $x\geq -2$. (2 pont)
A 3-nál kisebb számok halmazán tehát a $[-2;3[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
Ha $x>3$, akkor ($3-x<0$, ezért) $x+2\leq 0$, vagyis $x\leq -2$. (2 pont)
A 3-nál nagyobb számok halmazában nincs ilyen elem, tehát a 3-nál nagyobb számok között nincs megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
A megoldáshalmaz: $[-2;3[$. (1 pont)

b) $5\cdot 3^x=20$ (1 pont)
$3^x=4$ (1 pont)
$x=\log_3 4$ (1 pont)
$x\approx 1{,}2619$ (1 pont)

c) A megadott egyenlet cos x-ben másodfokú, így a megoldóképlet felhasználásával (1 pont)
$\cos x=0{,}5$ vagy $\cos x=-2$. (2 pont)
Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum). (1 pont)
A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

12) Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá: $f(x)=5x+5{,}25$ és $g(x)=x^2+2x+3{,}5$

a) Számítsa ki az alábbi táblázat hiányzó értékeit! (3 pont)

x	3	x	
$f(x)$		$g(x)$	**2,5**

b) Adja meg a g függvény értékkészletét! (3 pont)

c) Oldja meg az $5x+5{,}25>x^2+2x+3{,}5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (6 pont)

Megoldás:

a) $f(3)=20{,}25$ (1 pont)
$x^2+2x+3{,}5=2{,}5$ (1 pont)
$x=-1$ (1 pont)

b) A függvény hozzárendelési utasítását átalakítva: $x^2+2x+3{,}5=(x+1)^2+2{,}5$ (1 pont)
A függvény minimuma a 2,5. (1 pont)
Az értékkészlet: $[2{,}5;\infty[$ (1 pont)

c) Rendezés után: $x^2-3x-1{,}75<0$. (1 pont)
Az $x^2-3x-1{,}75=0$ egyenlet gyökei: $x_1=-\frac{1}{2}$ és $x_2=\frac{7}{2}$. (2 pont)
Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, (1 pont)
ezért az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$. (2 pont)

Összesen: 12 pont

13) Mely x valós számokra igaz, hogy $x^2 = 9$? (2 pont)

Megoldás:

$x_1 = -3$. (1 pont)

$x_2 = 3$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

14)

a) Melyik $(x;y)$ valós számpár megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left.\begin{aligned} 2x - 6y &= 4 \\ 3x + 5y &= 20 \end{aligned}\right\}$$ **(6 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{x+2} = x$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) (1) $2x - 6y = 4$

(2) $3x + 5y = 20$

(1) $2x = 4 + 6y$

$x = 2 + 3y$ (1 pont)

(2) $3(2+3y) + 5y = 20$ (1 pont)

$6 + 9y + 5y = 20$ (1 pont)

$y = 1$ (1 pont)

$x = 2 + 3y = 5$ (1 pont)

Ellenőrzés. Megoldás: $(5;1)$. (1 pont)

b) $\sqrt{x+2} = x$

$x + 2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$ (1 pont)

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ (1 pont)

$x_1 = 2$ (1 pont)

$x_2 = -1$ (1 pont)

Ellenőrzés: $x_2 = -1$ hamis gyök. (1 pont)

$x_1 = 2$ megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

15) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2x}{5} = 4$ **(5 pont)**

b) $\lg(x-1) + \lg 4 = 2$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $5\cdot(x-1)+2\cdot(2x)=2\cdot5\cdot4$ (2 pont)

Tehát $x=5$ (2 pont)

Visszahelyettesítéssel az eredeti egyenletbe megbizonyosodtunk róla, hogy az $x=5$ megoldás helyes. (1 pont)

b) Értelmezési tartomány: $x>1$ (1 pont)

Logaritmus-azonosság alkalmazásával: $\lg4(x-1)=2$ (2 pont)

A logaritmus definíció alapján: $4(x-1)=1$ (2 pont)

$x=26$ (1 pont)

Ellenőrzés, visszahelyettesítés (1 pont)

Összesen: 12 pont

16)

a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\boldsymbol{x+4=\sqrt{4x+21}}$$ **(6 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol *x* és *y* valós számot jelöl!

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{3x+y}&\boldsymbol{=16}\\ \boldsymbol{5x-2y}&\boldsymbol{=45}\end{aligned}\right\}$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $4x+21\ge0$ és $x+4\ge0\Rightarrow x\ge-4$

Négyzetre emelve mindkét oldalt (a belső kikötés elvégzése miatt lehetséges):

$x^2+8x+16=4x+21$. (2 pont)

Rendezve: $x^2+4x-5=0$ (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $x_1=-5,\ x_2=1$ (1 pont)

A -5 nem része az értelmezési tartománynak, így nem valódi gyök. (1 pont)

Az **1** ennek megfelelő gyök. (1 pont)

b) Az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva az első egyenletet beszorozva 2-vel:

$$\left.\begin{aligned}6x+2y&=32\\ 5x-2y&=45\end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Egyszerűsítés után adódik:

$11x=77$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=7}$ (1 pont)

Visszahelyettesítve x-et:

$\boldsymbol{y=-5}$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

A feladat megoldható a klasszikus behelyettesítős módszerrel is!

Összesen: 12 pont

17) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\boldsymbol{(x-3)^2+2x=14}$$

Válaszát indokolja! **(3 pont)**

Megoldás:

$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ (1 pont)

Az egyenletet rendezve: $x^2 - 4x - 5 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 5$, $x_2 = -1$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

18) Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságosnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12%-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt.

a) Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt? (10 pont)

b) A maradék 714 Ft-ot igazságosan akarják elosztani, azaz úgy, hogy a vásárlás előtti és utáni pénzük aránya azonos legyen. Hány forintja maradt Annának, illetve Zsuzsinak az osztozkodás után? (7 pont)

Megoldás:

a) Jelentse x a magazin árát. (1 pont)

Annának $0{,}88x$ forintja van. (1 pont)

Zsuzsinak $\frac{4}{5}x$ forintja van. (1 pont)

Az egyenlet: $0{,}88x + \frac{4}{5}x - x = 714$ (2 pont)

$x = 1050$ (1 pont)

$0{,}88x = 924$ és (1 pont)

$\frac{4}{5}x = 840$ (1 pont)

A magazin 1050 Ft-ba került. Annának eredetileg 924 Ft-ja, Zsuzsinak 840 Ft-ja volt. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) A maradékból Annának a, Zsuzsinak $714 - a$ Ft jut. (1 pont)

$\frac{924}{840} = \frac{a}{714-a}$ vagy $\frac{0{,}88}{0{,}8} = \frac{a}{714-a}$ (2 pont)

Ebből: $a = 374$ (1 pont)

$714 - a = 340$ (1 pont)

Tehát Annának 374 Ft-ja, Zsuzsinak 340 Ft-ja marad a vásárlás után.

(1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

19) 2001-ben a havi villanyszámla egy háztartás esetében három részből állt. az alapdíj 240 Ft, ez független a fogyasztástól, a nappali áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 19,8 Ft, az éjszakai áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 10,2 Ft. A számla teljes értékének 12 %-át kell még általános forgalmi adóként (ÁFA) kifizetnie a fogyasztónak.

a) Mennyit fizetett forintra kerekítve egy család abban a hónapban, amikor a nappali fogyasztása 39 kWh, az éjszakai fogyasztása 24 kWh volt? (3 pont)

b) Adjon képletet a befizetendő számla *F* összegére, ha a nappali fogyasztás *x* kWh, és az éjszakai fogyasztás pedig *y* kWh! (3 pont)

c) Mennyi volt a család fogyasztása a nappali, illetve és az éjszakai áramból abban a hónapban, amikor 5456 Ft-ot fizettek, és tudjuk, hogy a nappali fogyasztásuk kétszer akkora volt, mint az éjszakai? (8 pont)

d) Mekkora volt a nappali és az éjszakai fogyasztás aránya abban a hónapban, amikor a kétféle fogyasztásért (alapdíj és ÁFA nélkül) ugyanannyit kellett fizetni? (3 pont)

Megoldás:

a) $h = 1{,}12(240 + 39 \cdot 19{,}8 + 24 \cdot 10{,}2) = 1407{,}84 \approx \mathbf{1408\ Ft}$-ot fizettek. (2+1 pont)

b) $F = 1{,}12(240 + 19{,}8x + 10{,}2y)$ (3 pont)

c) $5456 = 1{,}12(240 + 19{,}8x + 10{,}2y)$ (2 pont)

$x = 2y$ (2 pont)

$4871{,}43 = 240 + 39{,}6y + 10{,}2y$ (1 pont)

$4631{,}43 = 49{,}8y$ (1 pont)

$y = 93$ (1 pont)

A nappali áramból 186 kWh, az éjszakaiból 93 kWh volt a fogyasztás. (1 pont)

d) $19{,}8x = 10{,}2y$ (1 pont)

$\frac{x}{y} = \frac{10{,}2}{19{,}8} \approx \mathbf{0{,}515}$ a keresett arány. (2 pont)

Összesen: 17 pont

20) Egy farmernadrág árát 20 %-kal felemelték, majd amikor nem volt elég nagy a forgalom, az utóbbi árat 25 %-kal csökkentették. Most 3600 Ft-ért lehet a farmert megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszát számítással indokolja! (4 pont)

Megoldás:

$1{,}2 \cdot 0{,}75x = 3600$ Ha x Ft a farmer eredeti ára, akkor (3 pont)

$\boldsymbol{x} = \mathbf{4000\ Ft}$ (1 pont)

Összesen: 4 pont

21) Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőfákéban, és minden sorban 5-tel kevesebb fa van, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában áll. 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyőfa. A platánok telepítésekor a fenyőkéhez viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték. Így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.

a) Hány sor van a fenyők parcellájában? Hány fenyőfa van egy sorban? (10 pont)

b) Hány platánfát telepítettek? (2 pont)

Megoldás:

a)

	sorok száma	egy sorban lévő fák száma	összesen	
fenyő	x	y	$x\cdot y$	
tölgy	$x-4$	$y-5$	$(x-4)(y-5)$	$x\cdot y-360$
platán	$x+3$	$y+2$	$(x+3)(y+2)$	$x\cdot y+228$

(3 pont)

A tölgyek és platánok összes számát kétféle módon felírva kapjuk az alábbi egyenleteket:

$(x-4)(y-5)=x\cdot y-360$ (1 pont)

$(x+3)(y+2)=x\cdot y+228$ (1 pont)

Rendezés után

$\begin{cases} 5x+4y=380 \\ 2x+3y=222 \end{cases}$ (2 pont)

Innen $x=36$ és $y=50$ (2 pont)

A fenyők parcellájában **36** sor, és egy sorban **50** db fenyőfa van. (1 pont)

b) A platánok parcellájában 39 sor és soronként 52 fa van. (1 pont)

2028 platánfa van. (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Bea édesapja két és félszer olyan idős most, mint Bea. 5 év múlva az édesapa 50 éves lesz. Hány éves most Bea? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Ha Bea most x éves, akkor $2,5x=45$, (2 pont)

ahonnan $\boldsymbol{x=18}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

23) Ha fél kilogramm narancs 75 Ft-ba kerül, akkor hány kilogramm narancsot kapunk 300 Ft-ért? (2 pont)

Megoldás:

2 kilogrammot. (2 pont)

24) Egy vállalat 250 000 Ft-ért vásárol egy számítógépet. A gép egy év alatt 10%-ot veszít az értékéből. Mennyi lesz a gép értéke 1 év elteltével? Írja le a számítás menetét! (3 pont)

Megoldás:

A gép értékének 10%-a: $250000\cdot 0,1=25000\,(\text{Ft})$

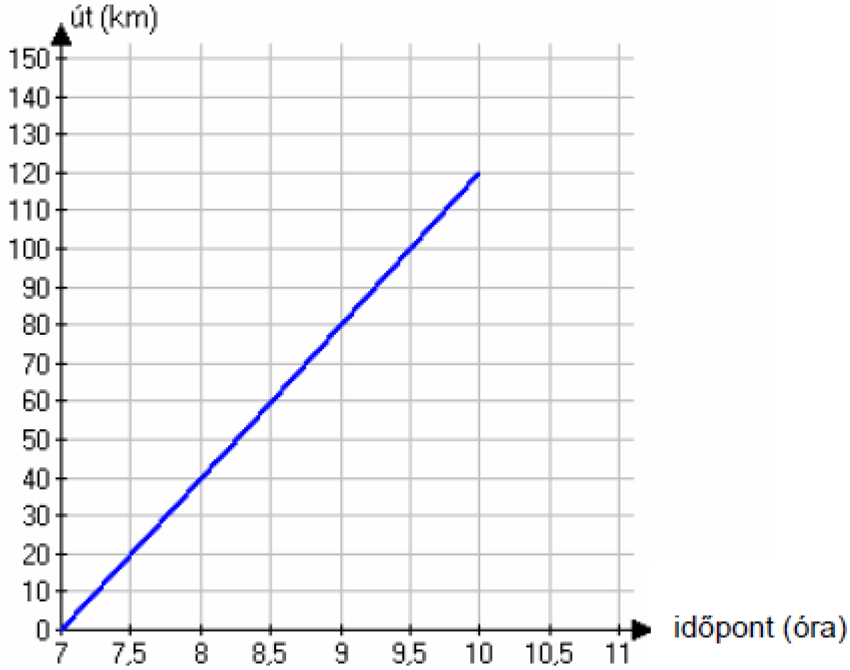
Egy év múlva: $250000(\text{Ft})-25000(\text{Ft})$

VAGY: Egy év után 90%-ra csökken az érték: $0,9\cdot 250000$. (2 pont)

A gép értéke: **225 000 Ft** lesz. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) **Budapestről reggel 7 órakor egy tehervonat indul Debrecenbe, amely megállás nélkül egyenletes sebességgel halad. A koordinátarendszerben a tehervonat által megtett utat ábrázoltuk az idő függvényében.**



a) **Mekkora utat tett meg a tehervonat az első órában?** **(2 pont)**

b) **Számítsa ki, hogy hány óra alatt tesz meg a tehervonat 108 kilométert?** **(2 pont)**

Budapestről reggel 7 óra 30 perckor egy gyorsvonat is indul ugyanazon az útvonalon Debrecenbe, amely megállás nélkül 70 km/h állandó nagyságú sebességgel halad.

c) **Rajzolja be a fenti koordinátarendszerbe a gyorsvonat út-idő grafikonját a 7 óra 30 perc és 9 óra 30 perc közötti időszakban!** **(2 pont)**

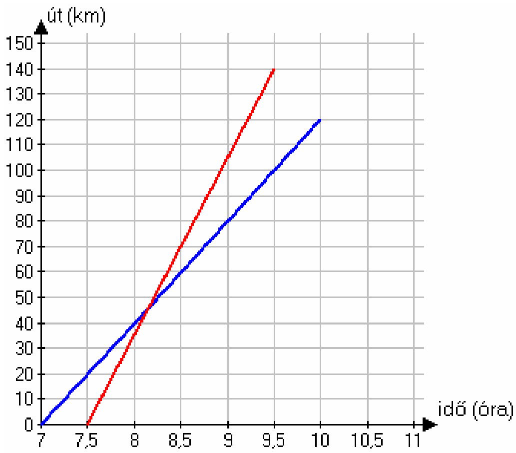
d) **Számítsa ki, hogy mikor és mekkora út megtétele után éri utol a gyorsvonat a tehervonatot!** **(11 pont)**

Megoldás:

a) **40 km**. (2 pont)

b) **2,7 óra**. (2 pont)

c) Ábra: (2 pont)



d) A tehervonat 0,5 óra alatt 20 km-t tesz meg. A gyorsvonat 1 óra alatt 30 km-rel tesz meg többet, mint a tehervonat, azaz percenként 0,5 km-t hoz be a hátrányából. (3 pont)

A tehervonat 20 km-es előnyét a gyorsvonat 40 perc alatt hozza be, tehát 8 óra 10 perckor éri utol. (4 pont)

$70 \cdot \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{140}{3}} \approx \mathbf{46{,}7}$ (1 pont)

A gyorsvonat kb. 46,7 km úton éri utol a tehervonatot.

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

26) Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a $\lg p_m = 0,8 \cdot \lg p_v + 0,301$ összefüggés áll fenn. A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

a) Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén? (4 pont)

b) Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat? (6 pont)

c) Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást? (7 pont)

A pascalban kiszámított értékeket egész számra kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) $\lg p_m = 0,8 \cdot \lg 20 + 0,301$ (2 pont)

$\lg p_m \approx 1,342$ (1 pont)

$\boldsymbol{p_m \approx 22}$ **(Pa)** (1 pont)

b) $\lg 50 = 0,8 \cdot \lg p_v + 0,301$ (2 pont)

$\lg p_v = \dfrac{\lg 50 - 0,301}{0,8}$, (2 pont)

$\lg p_v \approx 1,747$ (1 pont)

$\boldsymbol{p_v \approx 56}$ **(Pa)** (1 pont)

c) $p_v = p_m$ felismerése (2 pont)

(Legyen a keresett nyomás $p_v = p_m = p$)

$\lg p = 0,8 \cdot \lg p + 0,301$, (2 pont)

$\lg p = \dfrac{0,301}{0,2} = 1,505$ (2 pont)

$\boldsymbol{p \approx 32}$ **(Pa)** (1 pont)

Összesen: 17 pont

27) Egy szám $\frac{5}{6}$ részének a 20%-a 31. Melyik ez a szám? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

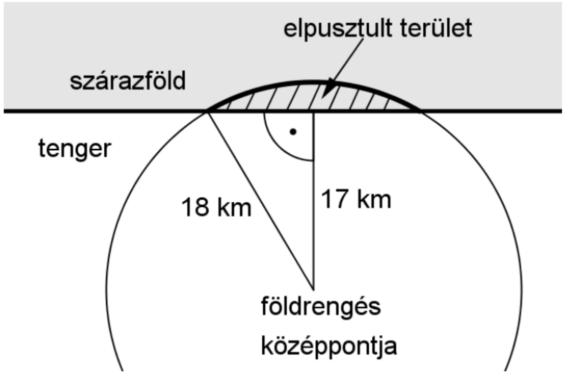
A keresett számot x-szel jelölve, a szám $\frac{5}{6}$ része: $\frac{5}{6}x$. (1 pont)

$\frac{5}{6}x \cdot 0,2 = 31$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = 186}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

28) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

Megoldás:

a) $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg\left(1,344 \cdot 10^{14}\right)$ (1 pont)

$\boldsymbol{M \approx 5}$ (2 pont)

b) $9,3 = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$ (1 pont)

$\lg E = 20,58$ (1 pont)

Tehát a felszabadult energia:

$\boldsymbol{E \approx 3,8 \cdot 10^{20}}$ **(J)**. (1 pont)

c) A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai:

$-4,42 + \frac{2}{3}\lg E_c = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E_k + 2$ (1 pont)

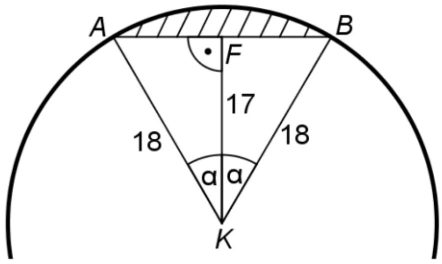
Rendezve: $\lg E_c - \lg E_k = 3$ (1 pont)

(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg\frac{E_c}{E_k} = 3$ (1 pont)

Ebből $\frac{E_c}{E_k} = 1000$ (1 pont)

1000-szer akkora volt a felszabadult energia. (1 pont)

d) Az ábra jelöléseit használjuk.



Az *AKF* derékszögű háromszögből:

$\cos\alpha = \frac{17}{18}$ (1 pont)

$\alpha \approx 19,2^\circ . \left(2\alpha \approx 38,4^\circ\right)$ (1 pont)

$T_{AKB\Delta} \approx \frac{18^2 \cdot \sin 38,4^\circ}{2} \left(\approx 100,6 \text{ km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körcikk} \approx 18^2 \pi \frac{38,4^\circ}{360^\circ} \left(\approx 108,6 \text{ km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körszelet} \approx 108,6 - 100,6 = 8 \ \left(\text{km}^2\right)$ (1 pont)

Az elpusztult rész területe körülbelül $\mathbf{8\ km^2}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

29) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ x + y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

A második egyenletből: $y = 7 - x$ (1 pont)

Az első egyenletbe helyettesítve: $5x + 7 - x = 3$. (1 pont)

$\boldsymbol{x = -1}$ (1 pont)

$\boldsymbol{y = 8}$ (1 pont)

Összesen: 4 pont

30) Az $x^2 + bx - 10 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 49. Számítsa ki b értékét! Számítását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

$b^2 + 40 = 49$ (1 pont)

$\boldsymbol{b = 3}$ vagy (1 pont)

$\boldsymbol{b = -3}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

31) Oldja meg az $x^2 - 4x - 21 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán! (2 pont)

Megoldás:

A másodfokú egyenlet együtthatóit behelyettesítjük a másodfokú egyenlet megoldóképletébe.

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1}$, melyből a két gyök az $\boldsymbol{x_1 = 7}$ és $\boldsymbol{x_2 = -3}$ (1 pont)

lesznek. (1 pont)

Összesen: 2 pont

32) Az x-nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg x lehetséges értékeit! **(2 pont)**

***Megoldás*:**

A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel: $|x+2|=6$

Az egyenlet megoldásánál két esetet különböztetünk meg.

I. $x+2=6 \Rightarrow \boldsymbol{x_1=4}$ (1 pont)

II. $x+2=-6 \Rightarrow \boldsymbol{x_2=-8}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

33) Oldja meg az alábbi egyenletet a nemnegatív valós számok halmazán!

$$\sqrt{x}=4^3$$ **(2 pont)**

***Megoldás*:**

A nemnegatív valós számok halmazán számolunk, ezért a négyzetre emelés jelen esetben ekvivalens átalakítás.

$(\sqrt{x})^2=(4^3)^2$

$x=4^6=\mathbf{4096}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

34)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$7-2\cdot(x+5)=\frac{x+6}{4}+\frac{x+2}{2}$$ **(5 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$x^2-x-2\le 0$$ **(5 pont)**

***Megoldás*:**

a) Először felbontjuk a zárójelet, közös nevezőre hozunk, majd felszorzunk a nevezővel.

$7-2x-10=\dfrac{x+6+2x+4}{4}$ (1 pont)

$4(-3-2x)=3x+10$ (1 pont)

Az egyenletet tovább egyszerűsítve a megoldás $\boldsymbol{x=-2}$. (2 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) Megoldjuk az $x^2-x-2=0$ egyenletet, melynek gyökei $x_1=-1$ és $x_2=2$ lesznek. (2 pont)

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, ezért a parabola értékei a $\boldsymbol{[-1;2]}$ intervallumon kisebb vagy egyenlők 0-nál. (3 pont)

Összesen: 10 pont

35)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! **(5 pont)**

$$(2x-3)^2=x^2$$

b) Hány olyan (pozitív) háromjegyű páratlan szám van a tízes számrendszerben, amelynek minden számjegye különböző? **(5 pont)**

Megoldás:

a) A zárójelet felbontva: $4x^2-12x+9=x^2$ (1 pont)
Az egyenletet rendezve: $3x^2-12x+9=0$ (1 pont)
$\boldsymbol{x_1=1}$ és $\boldsymbol{x_2=3}$ (2 pont)
Ellenőrzés… (1 pont)

b) A kérdéses számok utolsó számjegye ötféle lehet (1, 3, 5, 7 vagy 9). (1 pont)
Az első számjegy nem lehet 0, (1 pont)
és különböznie kell az utolsótól, így az utolsó számjegy rögzítése után nyolcféle lehet. (1 pont)
A második számjegy (amelynek különböznie kell az elsőtől és az utolsótól, azok rögzítése után) nyolcféle lehet. (1 pont)
A lehetőségek száma ezek szorzata, azaz: $8\cdot 8\cdot 5=$ **320**. (1 pont)

Összesen: 10 pont

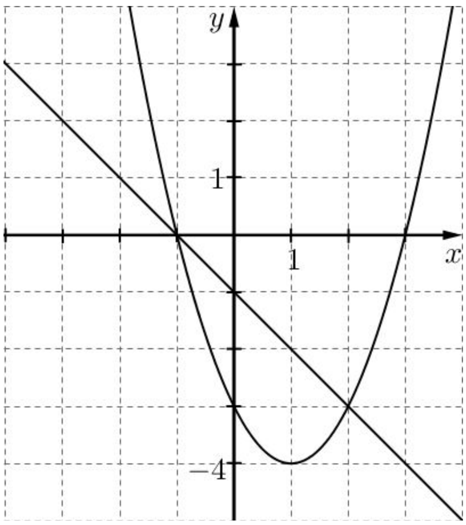
36) Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény: $f: x \mapsto (x-1)^2-4$.

a) Számítsa ki az f függvény $x=-5$ helyen felvett helyettesítési értékét! (2 pont)

b) Ábrázolja az f függvényt, és adja meg szélsőértékének helyét és értékét! (5 pont)

c) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $(x-1)^2-4=x-1$. (5 pont)

Megoldás:



a) $f(-5)=(-5-1)^2-4=$ **32** (2 pont)

b) Az ábrázolt függvény grafikonja az $x\mapsto x^2$ függvény grafikonjából eltolással származik (1 pont)
tengelypontjának első koordinátája 1, (1 pont)
második koordinátája -4. (1 pont)
A függvénynek az $x=1$ helyen van szélsőértéke (minimuma), (1 pont)
melynek értéke -4. (1 pont)

c) A $g: x\mapsto -x-1$ függvény helyes ábrázolása (ugyanabban a koordinátarendszerben) (2 pont)
A metszéspontok első koordinátáinak leolvasása: $\boldsymbol{x_1=-1}$ $\boldsymbol{x_2=2}$. (2 pont)
A kapott értékek ellenőrzése behelyettesítéssel. (1 pont)

Összesen: 12 pont

37)

a) Egy tört számlálója 119-cel kisebb a nevezőjénél. A tört egyszerűsített alakja $\frac{4}{11}$. Határozza meg ezt a törtet! (5 pont)

b) A $\frac{100}{n}$ tört nevezőjében az n helyére véletlenszerűen beírunk egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész számot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az így kapott tört értéke egész szám lesz? (5 pont)

Megoldás:

a) A törtet $\frac{x}{y}$ alakban keressük. A szöveg alapján két egyenletet tudunk felírni:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{y}=\frac{4}{11} \\ x=y-119 \end{array}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletet behelyettesítve az elsőbe megkapjuk, hogy $x=68$ és $y=187$. (2 pont)

A keresett tört tehát: $\mathbf{\frac{68}{187}}$ (1 pont)

A szövegbe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy a tört számlálója 119-cel kisebb a nevezőjénél, a tört értéke pedig valóban $\frac{4}{11}$ (1 pont)

b) Összesen 100-féle számot írhatunk a nevezőbe (összes eset száma). (1 pont)
A tört értéke akkor lesz egész szám, ha n osztója 100-nak. (1 pont)
A 100 (pozitív) osztói: 1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100, azaz összesen 9 kedvező eset van. (2 pont)

A kérdéses valószínűség tehát: $\mathbf{\frac{9}{100}=0,09}$. (1 pont)

Összesen: 10 pont

38)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x}{x+2}=\frac{8}{(x+2)(x-2)}$$ **(6 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{x}{x+2}<0$$ **(4 pont)**

c) Határozza meg a valós számokon értelmezett $f(x)=x^2-6x+5$ függvény minimumának helyét és értékét! (4 pont)

Megoldás:

a) Kikötés: a nevező miatt $x\neq-2$ és $x\neq2$ (1 pont)
Az egyenlet mindkét oldalát közös nevezőre hozva:

$$\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{8}{(x+2)(x-2)}\Rightarrow x(x-2)=8$$ (2 pont)

0-ra rendezve az egyenletet: $x^2-2x-8=0$ (1 pont)
Az egyenlet gyökei $x_1=-2$ és $x_2=4$ (1 pont)
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az egyenlet értelmezési tartományán ekvivalenciára való hivatkozással: $x_1=-2$ nem megoldás, $\mathbf{x_2=4}$ megoldás. (1 pont)

b) Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x>0$ és $x+2<0$, vagy ha $x<0$ és $x+2>0$. (2 pont)
Az első feltételnek megfelelő valós szám nincs, a második feltételből az egyenlőtlenség megoldása: $\mathbf{-2<x<0\,(x\in\mathbb{R})}$ (2 pont)

c) Teljes négyzetté alakítás: $f(x) = (x-3)^2 - 4$ (2 pont)

Innen leolvasható a parabola minimumának helye és értéke, tehát $\boldsymbol{x = 3}$ és $\boldsymbol{y = -4}$. (2 pont)

Összesen: 14 pont

39) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\boldsymbol{x^2 - 2x - 8 = 0}$$ **(2 pont)**

Megoldás:

A kifejezést szorzattá alakítva: $(x-4)(x+2) = 0$.

Egy szorzat akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0, így az egyenlet két megoldás $\boldsymbol{x_1 = 4}$ és $\boldsymbol{x_2 = -2}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

40) **x**

a) Hány olyan háromjegyű egész szám van, amelyre igaz az alábbi egyenlőtlenség?

$$\boldsymbol{\frac{x}{3} + \frac{x}{6} \geq \frac{x}{4} + 230}$$ **(4 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\boldsymbol{3 \cdot 4^x + 4^{x+1} = 896}$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A törteket közös nevezőre hozzuk: $\frac{4x}{12} + \frac{2x}{12} \geq \frac{3x}{12} + 230$ (1 pont)

Az ismeretleneket egy oldalra rendezzük: $\frac{3x}{12} \geq 230$ (1 pont)

Az egyenlet megoldása: $x \geq 920$. (1 pont)

999-919=**80** olyan háromjegyű egész szám van, ami eleget tesz a feltételnek. (1 pont)

b) $3 \cdot 4^x + 4 \cdot 4^x = 896$ (1 pont)

$7 \cdot 4^x = 896$ (1 pont)

$4^x = 128$ (1 pont)

$2^{2x} = 2^7$ (1 pont)

Mivel a 2-es alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $\boldsymbol{x = 3{,}5}$. (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel: $3 \cdot 4^{3,5} + 4^{4,5} = 384 + 512 = 896$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

41) Egy 125 férőhelyes szállodában összesen 65 szoba van: egy-, két- és háromágyasak.

a) Hány háromágyas szoba van a szállodában, ha a kétágyas szobák száma háromszorosa az egyágyas szobák számának? (7 pont)

A szállodába egy hat főből álló társaság érkezik: Aladár, Balázs, Csaba, Dezső, Elemér és Ferenc. Aladár és Balázs testvérek. A társaság tagjai az egyágyas 101-es, a kétágyas 102-es és a háromágyas 103-as szobát kapják. A recepciós kitesz a pultra egy darab 101-es, két darab 102-es és három darab 103-as szobakulcsot. A társaság tagjai a pultra helyezett kulcsok közül véletlenszerűen elvesznek egyet-egyet (ezzel kiválasztják a szobájukat).

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy Aladár és Balázs kerül a 102-es szobába! (6 pont)

Érkezésük után a vendégek a szálloda éttermében vacsoráztak. Vacsorájukra várva látták, hogy az egyik pincér – sietős mozdulatai közben – leejtett és összetört egy tányért. A szálloda pincérei felszolgálás közben átlagosan minden kétezredik tányért összetörik (ezt tekinthetjük úgy, hogy $\frac{1}{2000}$ annak a valószínűsége, hogy egy adott tányért összetörnek). A pincérek a következő vacsora alkalmával összesen 150 tányért szolgálnak fel.

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a következő vacsora közben a pincérek legalább egy tányért összetörnek! (4 pont)

Megoldás:

a) Az egyágyas szobák száma legyen n, ekkor kétágyas szobából $3n$, háromágyasból $65-4n$ darab van. (1 pont)

A feladat szövege alapján: $n+3n\cdot 2+(65-4n)\cdot 3=125$. (2 pont)

$195-5n=125$ (1 pont)

$n=14$ (1 pont)

Háromágyas szobából $65-4\cdot 14=\mathbf{9}$ darab van a szállodában. (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

b) A hat vendég $6!=720$ -féleképpen veheti el a kulcsokat (összes eset száma). (1 pont)

Kedvező esetek azok, amikor Aladár és Balázs a két 102-es kulcsot veszi el valamilyen sorrendben. (1 pont)

Ezt 2-féleképpen tehetik meg. (1 pont)

A többiek ekkor $4!=24$ -féleképpen vehetik el a maradék kulcsokat. (1 pont)

A kedvező esetek száma tehát $2\cdot 4!=48$. (1 pont)

A keresett valószínűség így $\frac{48}{720}=\mathbf{\frac{1}{15}}$. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Az egyágyas szobába kerülő személyt 6-féleképpen választhatjuk ki. (1 pont)

A maradék öt személyből a kétágyas szobába kerülő kettőt $\binom{5}{2}=10$ -féleképpen választhatjuk ki. (1 pont)

A maradék három személy kerül a háromágyas szobába, az összes eset száma így $6\cdot 10=60$. (1 pont)

Ha Aladár és Balázs a kétágyas szobába kerül, akkor a társaság másik négy tagja közül 4-féleképpen választhatjuk ki az egyágyas szobába kerülő személyt. A kedvező esetek száma tehát 4. (2 pont)

A keresett valószínűség így $\frac{4}{60}=\mathbf{\frac{1}{15}}$. (1 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy egy adott tányért nem törnek össze a pincérek: $\frac{1999}{2000}=0,9995$. (1 pont)

$P(\text{legalább egyet összetörnek})=1-P(\text{egyet sem törnek össze})$ (1 pont)

$1-0,9995^{150}\approx 1-0,928=\mathbf{0,072}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont