Térgeometria
Megoldások

1) Egy gömb alakú labda belső sugara 13 cm. Hány liter levegő van benne? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$V = \dfrac{4r^3\pi}{3}$

$V = \dfrac{4 \cdot 13^3\pi}{3}$ (1 pont)

$V \approx 9202{,}8 \ (\text{cm}^3)$ (1 pont)

A labdában $\approx$ **9,2 liter** levegő van. (1 pont)

Összesen: 3 pont

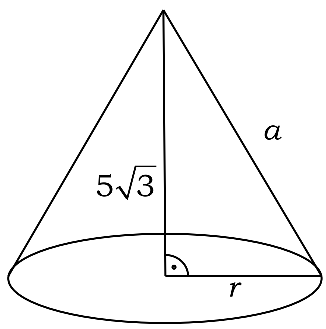
2) Egy forgáskúp alapkörének átmérője egyenlő a kúp alkotójával. A kúp magasságának hossza $5\sqrt{3}$ cm. Készítsen vázlatot!

a) Mekkora a kúp felszíne? (9 pont)

b) Mekkora a kúp térfogata? (2 pont)

c) Mekkora a kúp kiterített palástjának középponti szöge? (6 pont)

Megoldás:



a) Ábra (2 pont)

Pitagorasz-tétel alkalmazásával:

$a^2 = r^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2$ (1 pont)

$4r^2 = r^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2$ (2 pont)

$r = 5$ cm (1 pont)

$a = 10$ cm (1 pont)

$A = r^2\pi + r\pi a$

$A = 25\pi + 50\pi$ (1 pont)

$A = 75\pi \approx \mathbf{235{,}62\ cm^2}$ (1 pont)

b) $V = \dfrac{r^2\pi m}{3} \Rightarrow V = \dfrac{25\pi 5\sqrt{3}}{3}$ (1 pont)

$V \approx \mathbf{226{,}72\ cm^3}$ (1 pont)

c) A körcikk sugara a. (1 pont)

Az ívhossz: $a\pi$. (2 pont)

$\dfrac{a}{360^\circ} = \dfrac{a\pi}{2a\pi}$ (2 pont)

A kérdezett középponti szög: $\alpha = \mathbf{180^\circ}$ (1 pont)

A feladat megoldható az ívhosszak arányának felírásával is.

Összesen: 17 pont

3) Egy vállalkozás reklám-ajándéka szabályos hatszög alapú egyenes gúla, amit fából készítenek el. A gúla alapélei 4,2 cm hosszúak, magassága 25 mm.

a) Hány cm^3 faanyag van egy elkészült gúlában? (4 pont)

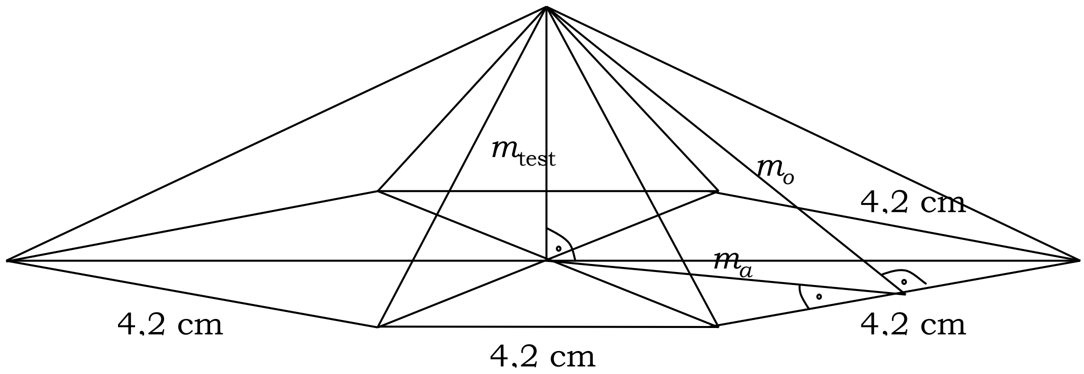
b) A gúla oldallapjait színesre festik. Hány cm^2 felületet festenek be egy gúla oldallapjainak a színezésekor? (8 pont)

c) A gúla oldallapjait hat különböző színnel festik be úgy, hogy 1-1 laphoz egy színt használnak. Hányféle lehet ez a színezés? (Két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha forgatással nem vihetők át egymásba.) (3 pont)

d) A cég bejáratánál az előbbi tárgy tízszeresére nagyított változatát helyezték el. Hányszor annyi fát tartalmaz ez, mint egy ajándéktárgy? (2 pont)

Megoldás:

a)



$V = \frac{1}{3} T_{\text{hatszög}} \cdot m_{\text{test}} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot T_{\text{háromszög}} \cdot m_{\text{test}}$ (1 pont)

A hatszög 6 egybevágó szabályos háromszögből épül fel, melyeknek minden oldala 4,2 cm hosszúságú.

A szabályos háromszög területe: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{4,2^2\sqrt{3}}{4}$.

$m = 25 \text{ mm} = 2,5 \text{ cm}$ (1 pont)

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{4,2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2,5 = 38,19 \text{ cm}^3 \approx \mathbf{38,2\ cm^3}$ faanyag van a gúlában. (2 pont)

b) $T_{\text{palást}} = 6 \cdot T_{\text{oldallap}} = 3am_o$ (1 pont)

$m_o{}^2 = m_a{}^2 + m_{\text{test}}{}^2$ (2 pont)

$m_a = \frac{4,2\sqrt{3}}{2} = 3,61 \text{ (cm)}$ (3 pont)

$m_o = 4,41 \text{ cm}$ (1 pont)

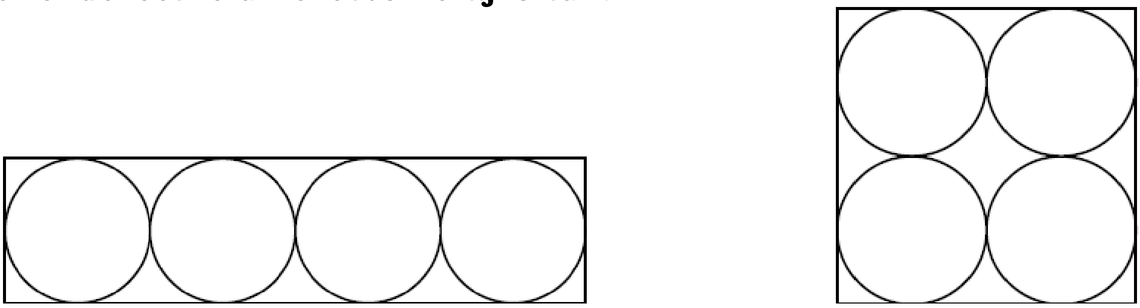
$T_{\text{palást}} = \mathbf{55,6\ cm^2}$, ennyi felületet festenek be. (1 pont)

c) Hatféle színt 6!-féle sorrendben lehet befesteni. (1 pont)
A gúla forgásszimmetriája miatt a színezések száma $5! = \mathbf{120}$ (2 pont)

d) A tízszeres nagyítás miatt $10^3 = \mathbf{1000}$**-szer** annyi fát tartalmaz. (2 pont)

Összesen: 17 pont

4) 4 cm átmérőjű fagolyókat négyesével kis (téglatest alakú) dobozokba csomagolunk úgy, hogy azok ne lötyögjenek a dobozokban. A két szóba jövő elrendezést felülnézetből lerajzoltuk:



A dobozokat átlátszó műanyag fóliával fedjük le, a doboz többi része kartonpapírból készül. A ragasztáshoz, hegesztéshez hozzászámoltuk a doboz méreteiből adódó anyagszükséglet 10%-át.

a) Mennyi az anyagszükséglet egy-egy dobozfajtánál a két felhasznált anyagból külön-külön? (8 pont)

b) A négyzet alapú dobozban a fagolyók közötti teret állagmegóvási célból tömítő anyaggal töltik ki. A doboz térfogatának hány százalékát teszi ki a tömítő anyag térfogata? (4 pont)

Megoldás:

a) A négyzet alapú doboznál:

$T_{alap} = 64\ \text{cm}^2$ (1 pont)

$T_{oldal} = 128\ \text{cm}^2$ (1 pont)

Az anyagszükséglet $1{,}1 \cdot (128 + 64) = \mathbf{211{,}2\ cm^2}$ **papír**, (1 pont)

és $1{,}1 \cdot 64 = 70{,}4\ \text{cm}^2$ fólia. (1 pont)

A téglalap alapú doboznál:

$T_{alap} = 64\ \text{cm}^2$ (1 pont)

$T_{oldal} = 4 \cdot (32 + 8) = 160\ \text{cm}^2$ (1 pont)

Az anyagszükséglet $1{,}1 \cdot 224 = \mathbf{246{,}4\ cm^2}$ **és** $\mathbf{70{,}4\ cm^2}$ **fólia**. (2 pont)

b) A doboz térfogata $8 \cdot 8 \cdot 4 = 256\ \text{cm}^3$ (1 pont)

A négy golyó térfogata együtt: $4 \cdot \dfrac{4 \cdot 2^3 \cdot \pi}{3} \approx 134\ \text{cm}^3$ (1 pont)

$256 - 134 = 122$

A keresett arány: $\dfrac{122}{256} \cdot 100 = 47{,}66 \approx \mathbf{48\%}$. (2 pont)

Összesen: 12 pont

5) Egy téglatest alakú akvárium belső méretei (egy csúcsból kiinduló éleinek hossza): 42 cm, 25 cm és 3 dm. Megtelik-e az akvárium, ha beletöltünk 20 liter vizet? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$V = 42 \cdot 25 \cdot 30 \left(= 31500\ \text{cm}^3 = 31{,}5\ \text{dm}^3\right) = 31{,}5$ liter (2 pont)

Az akvárium nem telik meg. (1 pont)

Összesen: 3 pont

6) Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm hosszú, palástjának területe (az oldallapok területösszege) hatszorosa az egyik alaplap területének. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? (12 pont)

Megoldás:

Az a oldalú szabályos háromszög magassága: $\frac{a\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. (1 pont)

Az alaplap területe: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right)$ (2 pont)

A palást területe: $3am_t=24m_t$ (2 pont)

$24m_t=6\cdot 16\cdot\sqrt{3}$

$m_t=4\sqrt{3}$ (2 pont)

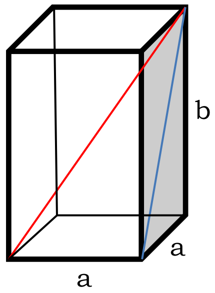
$V_{hasáb}=\left(T_a\cdot m_t=\right)16\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}=192\ \left(\text{cm}^3\right)$ (2 pont)

$A_{hasáb}=2T_a\cdot 3a\cdot m_t$ (1 pont)

$A_{hasáb}=2\cdot 16\cdot\sqrt{3}+24\cdot 4\cdot\sqrt{3}=128\cdot\sqrt{3}\approx \mathbf{221{,}7}\ \left(\mathbf{cm^3}\right)$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

7) Egy négyzetes oszlop egy csúcsból kiinduló három élének hossza: *a*, *a* és *b*. Fejezze ki ezekkel az adatokkal az ebből a csúcsból kiinduló testátló hosszát! (3 pont)



Megoldás:

A lapátló hossza $\sqrt{a^2+b^2}$

A testátló hossza $\sqrt{a^2+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}=\sqrt{\mathbf{2a^2+b^2}}$ (3 pont)

8) Egy gyertyagyárban sokféle színű, formájú és méretű gyertyát készítenek. A folyékony, felhevített viaszt különféle formákba öntik. Az öntőhelyek egyikén négyzet alapú egyenes gúlát öntenek, melynek alapéle 5 cm, oldaléle 8 cm hosszú.

a) Számítsa ki ennek a gúla alakú gyertyának a térfogatát! (Az eredményt cm³-ben, egészre kerekítve adja meg!) (4 pont)

Ezen az öntőhelyen az egyik műszakban 130 darab ilyen gyertyát gyártanak.

b) Hány liter viaszra van szükség, ha tudjuk, hogy a felhasznált anyag 6 %-a veszteség? (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)

A gúla alakú gyertyákat egyenként díszdobozba csomagolják.

c) Hány cm² papír szükséges 40 darab díszdoboz elkészítéséhez, ha egy doboz papírszükséglete a gúla felszínének 136%-a? (4 pont)

Megoldás:

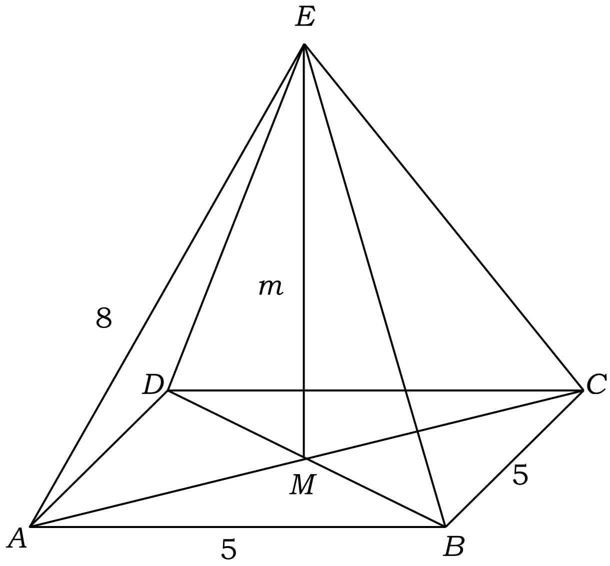
a) A test magassága m. (1 pont)

A négyzet átlójának a fele: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (cm) (1 pont)

$m=\sqrt{64-12,5}\ (\approx 7,2 \text{ cm})$ (1 pont)

A gúla alakú gyertya térfogata:

$V=\frac{T_a\cdot m}{3}\approx\frac{\mathbf{5^2\cdot 7,2}}{\mathbf{3}}\approx\mathbf{60\ (cm)}$ (1 pont)



b) Az x térfogatú viasznak a 94%-a adja a 130 db gyertya térfogatát:

$0,94\cdot x=130\cdot V$ (2 pont)

$x=\frac{130}{0,94}\cdot 60\approx 8296\ (\text{cm}^3)$ (1 pont)

8,3 liter viaszra van szükség. (1 pont)

c) Az oldallap magassága (Pitagorasz-tétellel) $m_o=\sqrt{8^2-2,5^2}\ (\approx 7,6 \text{ cm})$ (1 pont)

A palást területe: $P=4\cdot\frac{5\cdot m_o}{2}=10m_o\ (\approx 76 \text{ cm}^2)$ (1 pont)

A gúla felszíne: $A=5^2+P=101\ (\text{cm}^2)$ (1 pont)

A teljes felhasznált papírmennyiség:

$\mathbf{1,36\cdot 40\cdot A=1,36\cdot 40\cdot 101\approx 5494\ (cm^2)}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

9) Egy facölöp egyik végét csonkakúp alakúra, másik végét forgáskúp alakúra formálták. (Így egy forgástestet kaptunk.) A középső, forgáshenger alakú rész hossza 60 cm és átmérője 12 cm. A csonka kúp alakú rész magassága 4 cm, a csonka kúp fedőlapja pedig 8 cm átmérőjű. Az elkészült cölöp teljes hossza 80 cm.

a) Hány m³ fára volt szükség 5000 darab cölöp gyártásához, ha a gyártáskor a felhasznált alapanyag 18%-a a hulladék? (Válaszát egész m³-re kerekítve adja meg!) (8 pont)

Az elkészült cölöpök felületét vékony lakkréteggel vonják be.

b) Hány m² felületet kell belakkozni, ha 5000 cölöpöt gyártottak? (Válaszát egész m²-re kerekítve adja meg!) (9 pont)

Megoldás:

a) Az adatok helyes értelmezése (pl. ábra). (1 pont)

A csonka kúp alakú rész térfogatának kiszámítása $(\approx 318 \text{ cm}^3)$. (1 pont)

A henger alakú rész térfogatának kiszámítása $(\approx 6786 \text{ cm}^3)$. (1 pont)

A kúp alakú rész térfogatának kiszámítása $(\approx 603 \text{ cm}^3)$. (1 pont)

Egy cölöp térfogatának kiszámítása $\approx 7707 \text{ cm}^3$. (1 pont)

Egy cölöp elkészítéséhez $\approx\frac{7707}{0,82}(\approx 9399)\text{ cm}^3$. (2 pont)

5000 cölöp elkészítéséhez $\approx 46995000 \text{ cm}^3$, azaz $\approx \mathbf{47\ m^3}$ fára van szükség. (1 pont)

b) A csonka kúp fedőköre területének kiszámítása: $\approx 50\ \text{cm}^2$ (1 pont)
A csonka kúp alkotójának kiszámítása: $\sqrt{20}\,(\approx 4{,}47)$ (1 pont)
palást területének kiszámítása: $\approx 141\ \text{cm}^2$ (1 pont)
A hengerpalást területének kiszámítása: $\approx 2262\ \text{cm}^2$ (1 pont)
A kúp alkotójának kiszámítása: $\sqrt{292}\,(\approx 17{,}09)$ (1 pont)
a kúppalást területének kiszámítása: $\approx 322\ \text{cm}^2$ (1 pont)
1 cölöp felszíne $\approx 2775\ \text{cm}^2$ (1 pont)
5000 cölöp felszíne $\approx 13875000\ \text{cm}^2$, (1 pont)
ami $\approx$ **1388 m²**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

10) Egy fa építőjáték-készlet négyféle, különböző méretű téglatestfajtából áll. A készletben a különböző méretű elemek mindegyikéből 10 db van. Az egyik téglatest, nevezzük alapelemnek, egy csúcsából induló éleinek hossza: 8 cm, 4 cm, 2 cm. A többi elem méreteit úgy kapjuk, hogy az alapelem valamelyik 4 párhuzamos élének a hosszát megduplázzuk, a többi él hosszát pedig változatlanul hagyjuk.

a) Mekkora az egyes elemek felszíne? (4 pont)

b) Rajzolja le az alapelem kiterített hálózatának 1:2 arányú kicsinyített képét! (4 pont)

c) Elférhet-e a játékkészlet egy olyan kocka alakú dobozban, amelynek belső éle 16 cm? (4 pont)

d) A teljes készletből öt elemet kiveszünk. (A kiválasztás során minden elemet azonos valószínűséggel választunk.) Mekkora valószínűséggel lesz mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop? (A valószínűség értékét három tizedesjegy pontossággal adja meg!) (5 pont)

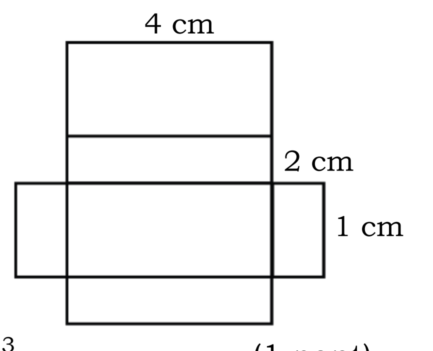
Megoldás:

a)

Az elem	Az elem méretei (cm)	Az elem felszíne (cm²)
alapelem	$8\times4\times2$	**112**
A elem	$16\times4\times2$	**208**
B elem	$8\times8\times2$	**192**
C elem	$8\times4\times4$	**160**

(4 pont)

b) Az alapelem éleinek hossza 1:2 arányú kicsinyítésben 4 cm, 2 cm és 1 cm. (4 pont)



c) Az alapelem térfogata $64\ \text{cm}^3$. Az alapelemen kívül még három különböző méretű elem van a készletben, ezek mindegyikének a térfogata $2\cdot 64 = 128\ \left(\text{cm}^3\right)$. (1 pont)

A négy különböző méretű elem térfogatának összege $448\ \text{cm}^3$. (1 pont)

A teljes készlet térfogata tízszer ennyi, vagyis $4480\ \text{cm}^3$. (1 pont)

Mivel a 16 cm élű doboz térfogata $4096\ \text{cm}^3$, a **játékkészlet nem fér el a dobozban**. (1 pont)

d) A teljes készletben 40 elem van. A B és a C elem négyzetes oszlop. A négyzetes oszlopok száma a készletben 20. (1 pont)

Annak valószínűsége, hogy az első kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen: $\frac{20}{40}$

hogy a második is az legyen: $\frac{20}{40}\cdot\frac{19}{39}$, (1 pont)

és így tovább. (Minden helyes kiválasztásnál eggyel csökken a négyzetes oszlopok és a készlet elemszáma is.)

Hogy az ötödik is négyzetes oszlop legyen: $\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}(\approx 0{,}02356)$

(2 pont)

Annak a valószínűsége, hogy mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen: $\approx \mathbf{0{,}024}$. (1 pont)

A feladat megoldható úgy is, ha a készletből kiválasztható 5 elemű részhalmazokat vesszük számba.

Összesen: 17 pont

11) Egy gömb alakú gáztároló térfogata 5000 m³. Hány méter a gömb sugara? A választ egy tizedesre kerekítve adja meg! Írja le a számítás menetét! (4 pont)

Megoldás:

Ha a gömb sugara r, akkor: $\frac{4\pi r^3}{3}=5000$, (1 pont)

$r^3=\frac{15000}{4\pi}(\approx 11994)$, (1 pont)

ebből $r=\sqrt[3]{\frac{15000}{4\pi}}$, (1 pont)

A gömb sugara **10,6 m**. (1 pont)

Összesen: 4 pont

12) Belefér-e egy $\mathbf{1600\ cm^2}$ felszínű (gömb alakú) vasgolyó egy 20 cm élű kocka alakú dobozba? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A kockába tehető legnagyobb felszínű gömb sugara 10 cm, (1 pont)

ennek felszíne $400\pi\approx 1256\ \text{cm}^2$ (1 pont)

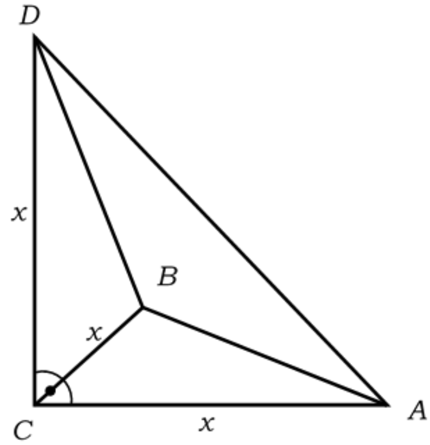
Nem fér bele a gömb a dobozba. (1 pont)

Összesen: 3 pont

13) Az iskolatejet gúla alakú, impregnált papírból készült dobozba csomagolják. (Lásd az alábbi ábrát, ahol $CA = CB = CD$.)
A dobozba 2,88 dl tej fér.

a) Számítsa ki a gúla éleinek hosszát! Válaszát egész cm-ben adja meg! (8 pont)

b) Mekkora a papírdoboz felszíne? Válaszát cm^2-ben, egészre kerekítve adja meg! (4 pont)



Megoldás:

a) $2,88\ \text{dl} = 288\ \text{cm}^3$ (1 pont)

A tetraéder (gúla) alapterülete $T_a = \dfrac{x^2}{2}$

(ekkor a magassága x), (1 pont)

a térfogata $V = \dfrac{x^3}{6}$ (1 pont)

$288 = \dfrac{x^3}{6}$, melyből (1 pont)

$x^3 = 1728$; $x = 12$ (1 pont)

Az ABD háromszög mindegyik oldala egyenlő, (1 pont)

hosszuk $x \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{16,97 \approx 17}$ cm (1 pont)

A tetraéder (gúla) élei **12 cm**, illetve **17 cm** hosszúak. (1 pont)

b) Az egybevágó derékszögű háromszögek területe: $T_1 = \dfrac{144}{2} = 72\ \left(\text{cm}^2\right)$ (1 pont)

A negyedik lap területe $T_2 = \dfrac{2x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$ (1 pont)

$\approx 124,7\ \left(\text{cm}^2\right)$ (1 pont)

A papírdoboz felszíne $A = 3T_1 + T_2 = 340,7 \approx \mathbf{341\ cm^2}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

14) Hányszorosára nő egy kocka térfogata, ha minden élét háromszorosára növeljük? (2 pont)

Megoldás:

Ha az eredeti kocka oldala a (a térfogata: a^3), akkor a már megnövelt kocka oldaléle :$3a$. Az új kocka térfogata, így $27a^3$.
A kocka térfogata **27-szeresére** nő. (2 pont)

15) Egy 12 cm oldalhosszúságú négyzetet megforgatunk az egyik oldalával párhuzamos szimmetriatengelye körül.

a) Mekkora az így keletkező forgástest térfogata és felszíne? (6 pont)
A felszínt egész cm^2-re, a térfogatot egész cm^3-re kerekítve adja meg!

Ugyanezt a négyzetet forgassuk meg az egyik átlóját tartalmazó forgástengely körül!

b) Mekkora az így keletkező forgástest térfogata és felszíne? (9 pont)
A felszínt egész cm^2-re, a térfogatot egész cm^3-re kerekítve adja meg!

c) A forgástestek közül az utóbbinak a felszíne hány százaléka az első forgatással kapott forgástest felszínének? (2 pont)

Megoldás:

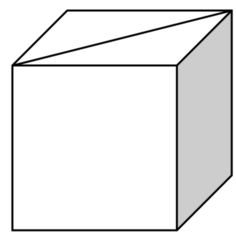
a) Az első esetben a forgástengely a négyzet szemközti oldalainak közös felezőmerőlegese, (1 pont)
a keletkező forgástest forgáshenger: alapkörének sugara 6 cm, magassága 12 cm. (1 pont)
Térfogata: $V_1 = 6^2\pi \cdot 12$ (1 pont)
$V_1 = 432\pi \approx \mathbf{1357\ cm^3}$ (1 pont)
Felszíne: $A_1 = 2 \cdot 6^2\pi + 2 \cdot 6\pi \cdot 12$ (1 pont)
$A_1 = 216\pi \approx \mathbf{679\ cm^2}$ (1 pont)

b) A második esetben (mivel a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást) a forgástest egy kettőskúp. A közös köralap átmérője a négyzet átlója, a kúpok magassága a négyzet átlóhosszának fele. (1 pont)
A négyzet átlója: $d = 12 \cdot \sqrt{2}\,(\approx 17)$ (1 pont)
Az egyik kúp térfogata: $V_2 = \dfrac{\left(6\sqrt{2}\right)^2 \pi \cdot 6\sqrt{2}}{3}$ (1 pont)
azaz $V_2 = 144\pi \cdot \sqrt{2}\,(\approx 640)$ (1 pont)
A két kúp egybevágó, így a kettőskúp térfogata: $V = 2V_2 \approx \mathbf{1280\ cm^2}$ (1 pont)
A forgáskúp palástja kiterítve körcikk, amelynek az ívhossza $2 \cdot 6\sqrt{2}\pi\,(\approx 17\pi \approx 53{,}4)(\mathrm{cm})$, (1 pont)
sugara 12 cm hosszú. (1 pont)
Így a területe: $T = \dfrac{2 \cdot 6\sqrt{2}\pi \cdot 12}{2} = 72\sqrt{2}\pi\left(\approx 320\ \mathrm{cm}^2\right)$ (1 pont)
A kettőskúp felszíne: $\mathbf{2T = 144\sqrt{2}\pi\left(\approx 640\ cm^2\right)}$. (1 pont)

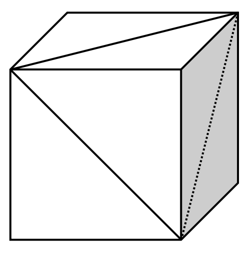
c) A kérdezett százalék: $\dfrac{2T}{A_1} \cdot 100 = \left(\dfrac{144\sqrt{2}\pi}{216\pi} \cdot 100\right)$, (1 pont)
azaz kb. **94%**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

16) Az ábrán látható kockának berajzoltuk az egyik lapátlóját. Rajzoljon ebbe az ábrába egy olyan másik lapátlót, amelynek van közös végpontja a berajzolt lapátlóval!
Hány fokos szöget zár be ez a két lapátló?
Válaszát indokolja! (3 pont)



Megoldás:



Az egy csúcsból kiinduló (bármelyik) két lapátló a végpontjaik által meghatározott harmadik lapátlóval kiegészítve szabályos háromszöget határoz meg, (2 pont)
a keresett szög ezért **60**°-os. (1 pont)

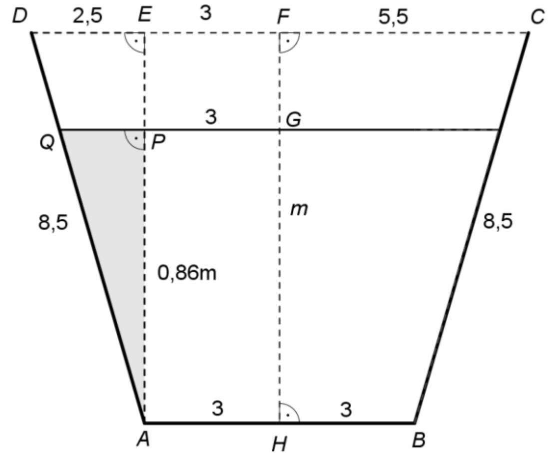
Összesen: 3 pont

17) Egy csonkakúp alakú tejfölös doboz méretei a következők: az alaplap átmérője 6 cm, a fedőlap átmérője 11 cm és az alkotója 8,5 cm.

a) Hány cm³ tejföl kerül a dobozba, ha a gyárban a kisebbik körlapján álló dobozt magasságának 86%-áig töltik meg?
Válaszát tíz cm³-re kerekítve adja meg! (11 pont)

b) A gyártás során a dobozok 3%-a megsérül, selejtes lesz. Az ellenőr a gyártott dobozok közül visszatevéssel 10 dobozt kiválaszt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 doboz között lesz legalább egy selejtes?
Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

Megoldás:



a) Ábra. (1 pont)
A csonkakúp m cm magas.
(A szimmetria miatt) $ED = 2,5$ cm. (1 pont)
Az AED derékszögű háromszögből ($AD = 8,5$ cm, $AE = m$):

$m^2 = 8,5^2 - 2,5^2$

$m \approx 8,1$ (1 pont)

Ennek 86%-a: $0,86m \approx 7$. (1 pont)

Az APQ és az AED derékszögű háromszögek hasonlók (mindkettő derékszögű és egyik hegyesszögük közös); (1 pont)
a hasonlóságuk aránya (megfelelő oldalaik hosszának aránya) 0,86. (1 pont)
Ezért $PQ = 0,86 \cdot DE$, vagyis $PQ = 8,6 \cdot 2,5 = 2,15$. (1 pont)
A síkmetszet sugara: $GQ = 3 + 2,15 = 5,15$. (1 pont)

A tejföl térfogata $V \approx \frac{7\pi}{3}\left(5,15^2 + 3^2 + 5,15 \cdot 3\right)$ (1 pont)

$V \approx 372,9 \ \left(\text{cm}^3\right)$ (1 pont)

Tíz cm³-re kerekítve a tejföl térfogata **370 cm³**. (1 pont)

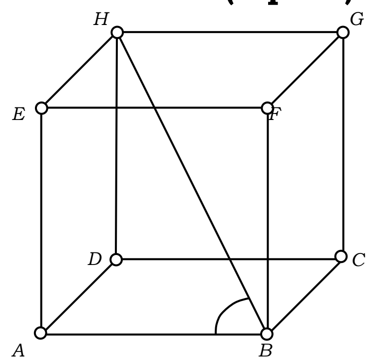
b) Komplementer eseménnyel számolunk. (1 pont)
Sérült doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,03, ezért a jó doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,97. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy az ellenőr nem talál selejtes terméket $0,97^{10}$, (2 pont)
tehát annak a valószínűsége, hogy talál selejtest $1 - 0,97^{10} \left(\approx 0,2626\right)$ (1 pont)
A keresett valószínűség két tizedesjegyre kerekítve **0,26**. (1 pont)
A feladat az eredeti esemény valószínűségét kiszámolva is megoldható.

Összesen: 17 pont

18)

a) Számítsa ki annak a szabályos négyoldalú gúlának a térfogatát, melynek minden éle 10 cm hosszú! (6 pont)

Térgeometriai feladatok megoldásában segíthet egy olyan készlet, melynek elemeiből (kilyuggatott kisméretű gömbökből és különböző hosszúságú műanyag pálcikákból) matematikai és kémiai modellek építhetők. Az ábrán egy kocka modellje látható.



b) Számítsa ki az *ABH* szög nagyságát! (A test csúcsait tekintse pontoknak, az éleket pedig szakaszoknak!) (4 pont)

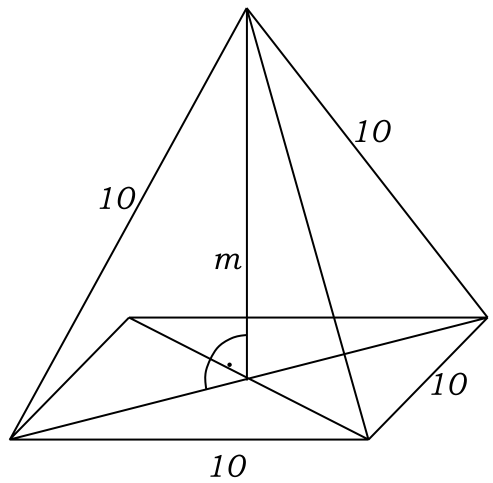
Anna egy molekulát modellezett a készlet segítségével, ehhez 7 gömböt és néhány pálcikát használt fel. Minden pálcika két gömböt kötött össze, és bármely két gömböt legfeljebb egy pálcika kötött össze. A modell elkészítése után feljegyezte, hogy hány pálcikát szúrt bele az egyes gömbökbe. A feljegyzett adatok: 6, 5, 3, 2, 2, 1, 1.

c) Mutassa meg, hogy Anna hibát követett el az adatok felírásában! (4 pont)

Anna is rájött, hogy hibázott. A helyes adatok: 6, 5, 3, 3, 2, 2, 1.

d) Hány pálcikát használt fel Anna a modell elkészítéséhez? (3 pont)

Megoldás:



a) A test alaplapja négyzet, melynek területe $T = 100\ \left(\text{cm}^2\right)$. (1 pont)

A gúla m magassága egy olyan derékszögű háromszög egyik befogója, melynek átfogója 10 (cm), (1 pont)

másik befogója (az alaplap átlójának fele):

$\frac{10\sqrt{2}}{2}\left(= \sqrt{50} \approx 7{,}07 \text{ cm}\right)$ (1 pont)

(Így a Pitagorasz-tétel értelmében:)

$m^2 = 100 - 50 = 50$ (1 pont)

amiből ($m > 0$ miatt) $m = \sqrt{50}\left(\approx 7{,}07 \text{ cm}\right)$ (1 pont)

A gúla térfogata $V = \frac{Tm}{3} = \mathbf{\frac{100\sqrt{50}}{3}\left(\approx 236\right)\ cm^3}$. (1 pont)

A magasság kiszámítható az oldallap magassága és a testmagasság által meghatározott háromszögből is.

b) (Mivel a kocka *BA* éle merőleges az *ADHE* oldallapra, ezért) a *HAB* szög nagysága 90°. (1 pont)

ABH szög legyen α .

A kocka élének hosszát a-val jelölve $AH = a\sqrt{2}$, (1 pont)

így $\text{tg}\alpha = \sqrt{2}$, (1 pont)

amiből ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ miatt) $\boldsymbol{\alpha = 54{,}74^\circ}$. (1 pont)

A szög nagysága koszinusztétel segítségével is megadható.

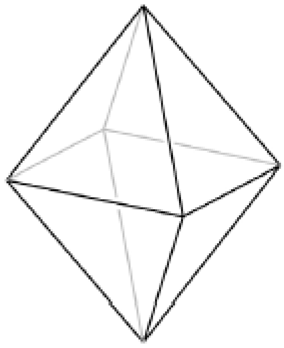
c) A gömböket jelölje a megadott fokszámok sorrendjében *A, B, C, D, E, F* és *G.* Az *A* gömb mindegyik másik gömbbel össze van kötve. (1 pont)

Mivel G elsőfokú gömb, ezért csak A-val van összekötve. (1 pont)
F is elsőfokú gömb, ezért F is csak A-val van összekötve. (1 pont)
Ezek szerint B csak A-val, C-vel, D-vel és E-vel lehet összekötve, vagyis nem lehet ötödfokú. (1 pont)

d) Mindegyik felhasznált pálcika két gömböt köt össze, így az egyes csúcsokból induló pálcikákat megszámolva minden felhasznált pálcikát kétszer számolunk meg. (1 pont)
Így az összes (jól) feljegyzett szám összege éppen kétszerese a pálcikák számának. (1 pont)
A pálcikák száma tehát: $\frac{6+5+3+3+2+2+1}{2}=\mathbf{11}$ (1 pont)
A pálcikák száma gráfos indoklással is megadható (a csúcsok fokszám-összege az élek számának kétszerese.)

Összesen: 17 pont

19) Tekintsünk két egybevágó, szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúlát, melyek alapélei 2 cm hosszúak, oldalélei pedig 3 cm-esek. A két gúlát alaplapjuknál fogva összeragasztjuk (az alaplapok teljesen fedik egymást), így az ábrán látható testet kapjuk.



a) Számítsa ki ennek a testnek a felszínét (cm²-ben) és a térfogatát (cm³-ben)! Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

A test lapjait 1-től 8-ig megszámozzuk, így egy „dobó-oktaédert” kapunk, amely minden oldallapjára egyforma valószínűséggel esik. Egy ilyen test esetében is van egy felső lap, az ezen lévő számot tekintjük a dobás kimenetelének. (Az ábrán látható „dobó-oktaéderrel” 8-ast dobtunk.)

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ezzel a „dobó-oktaéderrel” egymás után négyszer dobva, legalább három esetben 5-nél nagyobb számot dobunk! (8 pont)

Megoldás:

a) Az oldallap-háromszögekben a 2 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) $\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}\,(\approx 2,83)$ (cm). (1 pont)
Egy oldallap területe $\frac{2\cdot\sqrt{8}}{2}(\approx 2,83)$ (cm²). (1 pont)
A test felszíne: $A\approx 22,6$ cm². (1 pont)
A testet alkotó gúlák magassága megegyezik annak az egyenlő szárú háromszögnek a magasságával, amelynek szára a gúlák oldalélével, alapja a gúla alapjának átlójával egyezik meg. (1 pont)
A gúla m magasságára (a Pitagorasz-tételt alkalmazva): $m^2=3^2-\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2$ (1 pont)
$m=\sqrt{7}\,(\approx 2,65)$ (cm). (1 pont)
A gúla térfogata: $V=\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{7}\,(\approx 3,53)$ (cm³). (1 pont)
A test térfogata ennek kétszerese, azaz megközelítőleg $\mathbf{7,1cm^3}$. (2 pont)

b) $P(\text{egy adott dobás 5-nél nagyobb}) = \dfrac{3}{8}$ (2 pont)

$P(\text{mind a négy dobás 5-nél nagyobb}) = \left(\dfrac{3}{8}\right)^4 (\approx 0{,}0198)$ (1 pont)

$P(\text{három dobás 5-nél nagyobb, egy nem}) = \binom{4}{1} \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \cdot \dfrac{5}{8} (\approx 0{,}1318)$ (2 pont)

A kérdéses valószínűség ezek összege, azaz $\approx \mathbf{0{,}152}$. (3 pont)

Összesen: 17 pont

20) Egy szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúla alapéle 12 cm, oldallapjai 60°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Számítsa ki a gúla felszínét (cm²-ben) és térfogatát (cm³-ben)! Válaszait egészre kerekítve adja meg! (7 pont)

A gúlát két részre osztjuk egy az alaplappal párhuzamos síkkal, amely a gúla magasságát a csúcstól távolabbi harmadoló pontban metszi.

b) Mekkora a keletkező gúla és csonkagúla térfogatának aránya? Válaszát egész számok hányadosaként adja meg! (5 pont)

c) Számítsa ki a keletkező csonkagúla felszínét cm²-ben! (5 pont)

Megoldás:

a) Jó ábra az adatok feltüntetésével. (1 pont)

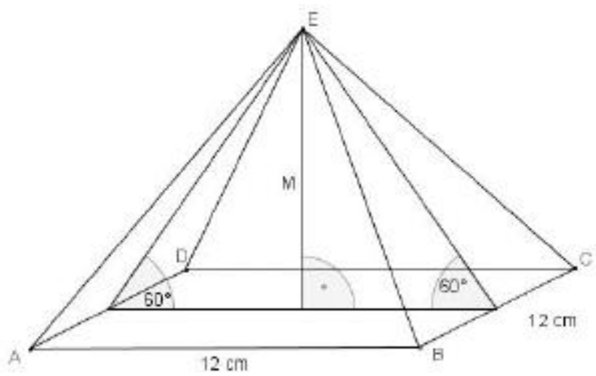
A gúla magassága:

$M = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \left(= 6\sqrt{3} \approx 10{,}39\right)(\text{cm})$. (1 pont)

A gúla oldallapjának a 12 cm-es oldalhoz tartozó magassága szintén 12 cm. (1 pont)

A gúla felszíne: $A = 12^2 + 4 \cdot \dfrac{12^2}{2} =$ **432 cm²**. (2 pont)

A gúla térfogata: $V = \dfrac{12^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} \approx$ **499** cm³. (2 pont)



b) Az adott sík a gúlát egy csonkagúlára és egy az eredetihez hasonló gúlára vágja szét, ahol a hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{2}{3}$. (2 pont)

A hasonló testek térfogatának aránya: $\dfrac{V_{\text{levágott gúla}}}{V_{\text{eredeti gúla}}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$, (1 pont)

A hasonló testek térfogatának aránya: $19:27$, (1 pont)

azaz a keletkező testek térfogatának aránya $\mathbf{8:19}$. (1 pont)

c) (A középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonságai miatt) a csonkagúla fedőéle $12 \cdot \dfrac{2}{3} = 8$ (cm), alapéle $12\,\text{cm}$. (1 pont)

Egy oldallapjának magassága $12 \cdot \dfrac{1}{3} = 4$ (cm). (1 pont)

Egy oldallapjának területe: $T = \dfrac{12+8}{2} \cdot 4 = 40$ (cm²). (1 pont)

A csonkagúla felszíne: $A = 12^2 + 8^2 + 4 \cdot 40 =$ **368 cm².** (2 pont)

Összesen: 17 pont

21) Egy henger alakú bögre belsejének magassága 12 cm, belső alapkörének átmérője 8 cm. Belefér-e egyszerre $\frac{1}{2}$ liter kakaó? Válaszát indokolja!

(4 pont)

Megoldás:

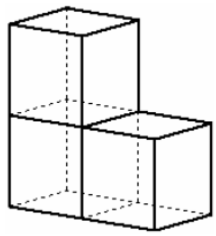
$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 4^2 \cdot \pi \cdot 12$ (2 pont)

$V \approx 603 \text{ cm}^3$ (1 pont)

$\frac{1}{2}$ liter $= 500 \text{ cm}^3$, tehát **belefér** a bögrébe. (1 pont)

Összesen: 4 pont

22) Három tömör játékkockát az ábrának megfelelően rakunk össze. Mindegyik kocka éle 3 cm.
Mekkora a keletkező test
a) felszíne, (3 pont)
b) térfogata? (1 pont)
Számítását írja le!



Megoldás:

a) Egy lap területe 9 cm². (1 pont)
A felszín 14 lap területének összege. (1 pont)
$A = 14 \cdot 9 \text{ cm}^2 = \mathbf{126 \text{ cm}^2}$. (1 pont)

b) A keletkező test térfogata $3 \cdot 3^3 \text{cm}^3 = \mathbf{81 \text{ cm}^3}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

23) Egy téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza 15 cm, 12 cm és 8 cm. Számítsa ki a téglatest felszínét! Írja le a számítás menetét! (3 pont)

Megoldás:

$A = 2 \cdot (15 \cdot 12 + 15 \cdot 8 + 8 \cdot 12) = 792$ (2 pont)

Tehát a téglatest felszíne **792 cm²**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

24) Egy henger alakú fazék belsejének magassága 14 cm, belső alapkörének átmérője 20 cm. Meg lehet-e főzni benne egyszerre 5 liter levest? Válaszát indokolja! Belefér 5 liter leves? (4 pont)

Megoldás:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 10^2 \cdot \pi \cdot 14$ (2 pont)

$V \approx 4398 \text{ cm}^3$ (1 pont)

Tehát az 5 liter leves nem fér bele a fazékba, mivel a 4398 cm³ kevesebb, mint az 5000 cm³. (1 pont)

Összesen: 4 pont

25) A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer $\left(\mathbf{2 \cdot 10^{-6} m}\right)$, átmérője 0,5 mikrométer $\left(\mathbf{5 \cdot 10^{-7} m}\right)$.

a) Számítsa ki egy 2 mikrométer magas és 0,5 mikrométer átmérőjű forgáshenger térfogatát és felszínét! Számításainak eredményét m³-ben, illetve m²-ben, normálalakban adja meg! (5 pont)

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.

b) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével? (4 pont)

A baktériumok számát a tápoldatban *t* perc elteltével a $B(t)=3000000\cdot 2^{\frac{t}{15}}$ összefüggés adja meg.

c) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszát egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

Megoldás:

a) A henger alapkörének sugara $2{,}5\cdot 10^{-7}$ (m), (1 pont)

térfogata $V=\left(2{,}5\cdot 10^{-7}\right)^2\cdot\pi\cdot 2\cdot 10^{-6}$, (1 pont)

normálalakban $\boldsymbol{V\approx 3{,}9\cdot 10^{-19}\left(m^3\right)}$. (1 pont)

A henger felszíne:

$A=2\cdot\left(2{,}5\cdot 10^{-7}\right)^2\cdot\pi+5\cdot 10^{-7}\cdot\pi\cdot 2\cdot 10^{-6}$, (1 pont)

normálalakban $\boldsymbol{A\approx 3{,}5\cdot 10^{-12}\left(m^2\right)}$. (1 pont)

b) A kólibaktériumok száma 1,5 óra alatt 6-szor duplázódott, (2 pont)

ezért 1,5 óra után $3000000\cdot 2^6=$ (1 pont)

$=\mathbf{192}$ millió lesz a baktériumok száma. (1 pont)

c) A baktériumok száma x perc múlva lesz 600 millió. Meg kell oldanunk a $3\cdot 2^{\frac{x}{15}}=600$ egyenletet. (2 pont)

$2^{\frac{x}{15}}=200$ (1 pont)

Átalakítva:

$\frac{x}{15}=\log_2 200$ (2 pont)

$x=15\cdot\frac{\lg 200}{\lg 2}$ (1 pont)

amiből $x\approx 115$ adódik. (1 pont)

Tehát **115 perc múlva** lesz a baktériumok száma 600 millió. (1 pont)

Összesen: 17 pont

26) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.

a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben 1,5 m²-en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a 27 m²-es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.

b) Hány m² területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

Megoldás:

a) Ha naponta x-szeresére nőtt az algás terület, akkor:

$1{,}5 \cdot x^7 = 27$. (1 pont)

$x = \sqrt[7]{18} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{1{,}5}$ (1 pont)

Az algás terület naponta körülbelül a másfélszeresére növekedett. (1 pont)

b) A medence alaplapja egy 2,4 m oldalhosszúságú szabályos hatszög, ennek területe $T_{\text{alaplap}} = 6 \cdot \dfrac{2{,}4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$ (2 pont)

$\approx 14{,}96\ \text{m}^2$ (1 pont)

A medence oldalfalainak összterülete:

$T_{\text{oldalfal}} = 6 \cdot 2{,}4 \cdot 0{,}4 = 5{,}76\left(\text{m}^2\right)$. (1 pont)

Így összesen körülbelül $\mathbf{20{,}7\ m^2}$ felületet burkoltak csempével. (1 pont)

A medence térfogata:

$V = T_{\text{alaplap}} \cdot m = 6 \cdot \dfrac{2{,}4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 0{,}4 \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{5{,}986\ m^2}$. (1 pont)

Körülbelül **5986 liter** víz fér el a medencében. (1 pont)

c) Ha például a kék és a sárga színt választották ki, akkor $\binom{6}{3} = 20$ különböző módon választható ki az a három vízsugár, amelyet a kék színnel világítanak meg (a másik három fénysugarat ugyanekkor sárga színnel világítják meg). (2 pont)

A megvilágításhoz két színt háromféleképpen választhatnak ki (kék-sárga, kék-piros, piros-sárga). (1 pont)

$3 \cdot \binom{6}{3} = 60$ (1 pont)

Azaz **60** különböző megvilágítás lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

27) Egy család személyautóval Budapestről Keszthelyre utazott. Útközben lakott területen belül, országúton és autópályán is haladtak. Az utazással és az autóval kapcsolatos adatokat a következő táblázat tartalmazza:

	megtett út hossza (km)	átlagsebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{óra}}\right)$	átlagos benzinfogyasztás 100 km-en (liter)
lakott területen belül	45	40	8,3
országúton	35	70	5,1
autópályán	105	120	5,9

a) Mennyi ideig tartott az utazás? (4 pont)
b) Hány liter ezen az utazáson az autó 100 km-re eső átlagfogyasztása? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Útközben elfogyott az autóból a benzin. A legközelebbi benzinkútnál kétféle benzines kannát lehet kapni. A nagyobbra rá van írva, hogy 20 literes, a kisebbre nincs ráírva semmi. A két kanna (matematikai értelemben) hasonló, a nagyobb kanna magassága éppen kétszerese a kisebb kanna magasságának.
c) Hány literes a kisebb kanna? (4 pont)

Megoldás:

a) Egy adott útszakasz megtételéhez szükséges időt megkapjuk, ha az útszakasz hosszát elosztjuk az útszakon mért átlagsebességgel. (1 pont)
Az egyes útszakaszok megtételéhez szükséges idő
lakott területen belül: $1{,}125$ (óra)
országúton: $0{,}5$ (óra) (2 pont)
autópályán $0{,}875$ (óra).
Így összesen $1{,}125+0{,}5+0{,}875=\mathbf{2{,}5}$ óráig tartott az utazás. (1 pont)

b) Az egyes útszakaszokon az autó fogyasztása
lakott területen belül: $\frac{45}{100}\cdot 8{,}3=3{,}735$ (liter),
országúton: $\frac{35}{100}\cdot 5{,}1=1{,}785$ (liter), (2 pont)
autópályán: $\frac{105}{100}\cdot 5{,}9=6{,}195$ (liter).
Az összes fogyasztás 185 km-en 11,715 liter. (1 pont)
100 km-en az átlagfogyasztás: $\frac{11{,}715}{185}\cdot 100$ (liter). (1 pont)
Az autó átlagfogyasztása 100 km-en kb. **6,3 liter**. (1 pont)

c) A két test hasonló, a hasonlósági arány $1:2$, (1 pont)
így a térfogatok aránya $1:8$. (2 pont)
A kisebb kanna térfogata $\mathbf{\frac{20}{8}=2{,}5}$ **liter**. (1 pont)

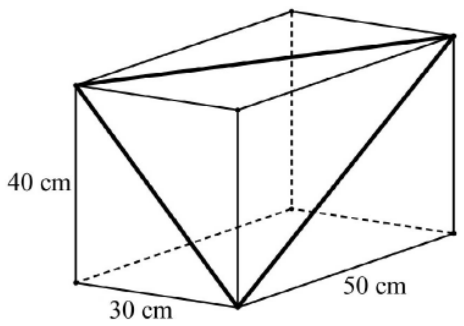
Összesen: 13 pont

28) **Egy téglatest alakú akvárium egy csúcsból kiinduló élei 30 cm, 40 cm, illetve 50 cm hosszúak.**

a) Hány literes ez az akvárium? (A számolás során tekintsen el az oldallapok vastagságától!) (3 pont)

Tekintsük azt a háromszöget, amelynek oldalait az ábrán látható téglatest három különböző hosszúságú lapátlója alkotja.

b) Mekkora ennek a háromszögnek a legkisebb szöge? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! (8 pont)



Megoldás:

a) $V = 30 \times 40 \times 50 = 60000 \ \left(\text{cm}^3\right)$ (1 pont)

$V = 60 \ \text{dm}^3$. (1 pont)

Az akvárium térfogata **60 liter**. (1 pont)

b) Az egyes lapátlók hossza:

$\sqrt{50^2 + 40^2} = \sqrt{4100}\,(\approx 64{,}03)\,(\text{cm})$,

$\sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{3400}\,(\approx 58{,}31)\,(\text{cm})$, (2 pont)

$\sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \ (\text{cm})$.

A legkisebb szög a legrövidebb oldallal van szemben. (1 pont)

A legrövidebb oldallal szemközti szöget α-val jelölve, koszinusztétellel:

$2500 = 4100 + 3400 - 2 \cdot \sqrt{4100} \cdot \sqrt{3400} \cdot \cos\alpha$. (2 pont)

Ebből $\cos\alpha \approx 0{,}6696$. (2 pont)

A háromszög legkisebb szöge: $\boldsymbol{\alpha = 48°}$. (1 pont)

Összesen: 11 pont

29) **A biliárdjáték megkezdésekor az asztalon 15 darab azonos méretű, színezésű biliárdgolyót helyezünk el háromszög alakban úgy, hogy az első sorban 5 golyó legyen, a másodikban 4, a következőkben pedig 3, 2, illetve 1 golyó. (A golyók elhelyezésére vonatkozó egyéb szabályoktól tekintsünk el.)**

a) Hányféleképpen lehet kiválasztani a 15-ből azt az 5 golyót, amelyet majd az első sorban helyezünk el? (Az 5 golyó sorrendjét nem vesszük figyelembe.) (3 pont)

b) Hányféle különböző módon lehet az első két sort kirakni, ha a 9 golyó sorrendjét is figyelembe vesszük? (3 pont)

Egy biliárdasztal játékterülete téglalap alakú, mérete 194 cm × 97 cm. A játékterület középpontja felett 85 cm-rel egy olyan (pontszerűnek tekinthető) lámpa van, amely fénykúpjának a nyílásszöge 100°.

c) Számítással állapítsa meg, hogy a lámpa megvilágítja-e a játékterület minden pontját! (11 pont)

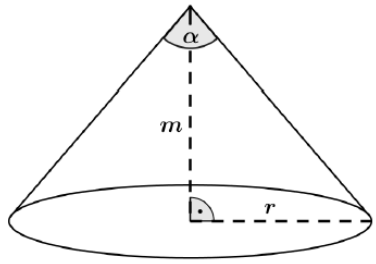
Megoldás:

a) 15 golyóból az első sorba kerülő 5-öt $\binom{15}{5} =$ (2 pont)

$=$ **3003**-féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)

b) A lehetséges különböző kirakások száma:
$15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 7 =$ (2 pont)
$= \mathbf{1816214400}$. (1 pont)

c) Az ábra, melyen a lámpa fénykúpjának nyílásszöge, azaz $\alpha = 100°$, a kúp magassága $m = 85\,\text{cm}$, az alapkör sugara r. (2 pont)



Szögfüggvény alkalmazása a derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} 50° =$ (1 pont)
$= \dfrac{r}{m}$. (1 pont)
Ebből az alapkör sugara: $r \approx 101{,}3\,(\text{cm})$. (1 pont)
A kérdés megválaszolásához az asztallap két legtávolabbi pontjának a távolságát kell vizsgálni, vagyis meg kell határozni a téglalap átlóinak (e) a hosszát. (2 pont)
$e^2 = 194^2 + 97^2$ (1 pont)
$e \approx 216{,}9\,(\text{cm})$ (1 pont)
Mivel $e > 2r$, (1 pont)
ezért a lámpa **nem világítja be** az asztallap minden pontját. (1 pont)

Összesen: 17 pont

30) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!
a) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus négyszög.
b) A kocka testátlója 45°-os szöget zár be az alaplappal.
c) A szabályos tizenhétszögben az egyik csúcsból kiinduló összes átló a tizenhétszöget 15 háromszögre bontja. (2 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) **Hamis**
b) **Hamis**
c) **Igaz** (2 pont)

31) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)
a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)
Az előre jelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.
b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a? (5 pont)
Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.
c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)
A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.
d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

Megoldás:

a) A kereslet minden évben várhatóan az előző évi kereslet $1{,}6$-szorosára változik, (1 pont)

így 5 év múlva az idei $1{,}06^5 \approx 1{,}34$-szorosára nő. (1 pont)

Ez kb. **34%-kal** magasabb, mint az idei kereslet. (1 pont)

b) Az ár minden évben várhatóan az előző év ár $0{,}9$-szorosára változik, (1 pont)

így megoldandó a $0{,}94^n = 0{,}65$ egyenlet, (ahol n az eltelt évek számát jelenti.) (1 pont)

Ebből $n = \frac{\lg 0{,}65}{\lg 0{,}94} (\approx 6{,}96)$. (2 pont)

Azaz várhatóan **7 év múlva** lesz az ár a jelenlegi ár 65%-a. (1 pont)

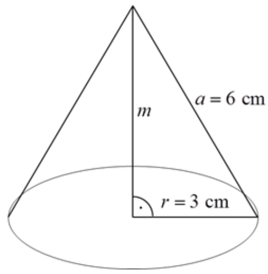
c) A bevételt a kereslet és az ár szorzatából kapjuk, (1 pont)

így 8 év múlva a jelenlegi bevétel $(1{,}06 \cdot 0{,}94)^8 \approx$ (1 pont)

$\approx 0{,}972$-szerese várható. (2 pont)

Azaz 8 év múlva a bevétel az ideinél kb. **$2{,}8$%-kal** lesz alacsonyabb. (1 pont)

d) Ábra az adatok feltüntetésével. (1 pont)



A kúp magasságát m-mel jelölve a Pitagorasz-tétel alapján:

$m = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} (\approx 5{,}2\,\text{cm})$. (1 pont)

A kúp térfogata $V \approx \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 5{,}2 \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{49\,cm^3}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

32) Egy műanyag terméket gyártó üzemben szabályos hatoldalú csonkagúla alakú, felül nyitott virágtartó dobozokat készítenek egy kertészet számára (lásd az ábrát). A csonkagúla alaplapja $13\,\text{cm}$ oldalú szabályos hatszög, fedőlapja $7\,\text{cm}$ oldalú szabályos hatszög, az oldalélei $8\,\text{cm}$ hosszúak.

a) Egy műanyagöntő gép $1\,\text{kg}$ alapanyagból (a virágtartó doboz falának megfelelő anyagvastagság mellett) $0{,}93\,\text{m}^2$ felületet képes készíteni. Számítsa ki, hány virágtartó doboz készíthető $1\,\text{kg}$ alapanyagból! (11 pont)

A kertészetben a sok virághagymának csak egy része hajt ki: $0{,}91$ annak a valószínűsége, hogy egy elültetett virághagyma kihajt.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy 10 darab elültetett virághagyma közül legalább 8 kihajt! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

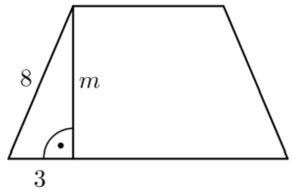
***Megoldás*:**

a) A virágtartó doboz talpának felszíne megegyezik a csonkagúla $7\,\text{cm}$-es oldalhosszúságú fedőlapjának területével. Ez egy szabályos hatszög, melynek területe egyenlő $6\,\text{db}$ $7\,\text{cm}$ oldalhosszúságú szabályos háromszög területével. (1 pont)

$t_1 = 6 \cdot \frac{7^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} \approx 127{,}3\,\text{cm}^2$ (2 pont)

A virágtartó oldalának felületét a csonkagúla oldallapjait alkotó húrtrapézok területével számítjuk ki.

A magasság az $3^2 + m^2 = 8^2$ összefüggésből adódóan $m \approx 7,42\,\text{cm}$. (3 pont)



A trapéz területe ekkor: $t_2 = \frac{7+13}{2} \cdot 7,42 = 74,2\,\text{cm}^2$. (1 pont)

Így a teljes felület $A = 127,3 + 6 \cdot 74,2 = 572,5\,\text{cm}^2$. (1 pont)

Mivel a gép 1kg anyagból $9300\,\text{cm}^2$ felületet képes elkészíteni, ezért 1kg anyagból $\frac{9300}{572,5} \approx 16,24$. (2 pont)

Vagyis **16** virágtartó doboz készíthető. (1 pont)

b) Ha legalább 8 virághagyma kihajt, akkor 8, 9 vagy 10 hajt ki. (1 pont)

I. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 8 kihajt és 2 nem a binomiális tétellel számítható ki: $p_1 = \binom{10}{8} \cdot 0,91^8 \cdot 0,09^2 \approx 0,1714$ (1 pont)

II. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 9 kihajt és 1 nem: $p_2 = \binom{10}{9} \cdot 0,91^9 \cdot 0,09 \approx 0,3851$ (1 pont)

III. Végül annak a valószínűsége, hogy mind a 10 kihajt: $p_3 = 0,91^{10} \approx 0,3894$ (1 pont)

A keresett valószínűség a három eset valószínűségének összege, vagyis $P = p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{0,946}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

33) Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ, melynek alapéle 6cm, oldaléle 5cm hosszúságú. Egy szaküzletben 11cm oldalú, kocka alakú tömbökben árulják a gyertyának való viaszt. Ezt megolvasztva és az olvadt viaszt a formába öntve készülnek a gyertyák. (A számítások során tekintsen el az olvasztás és öntés során bekövetkező térfogatváltozástól.)

a) Legfeljebb hány gyertyát önthet Zsófi egy 11cm oldalú, kocka alakú tömbből? (6 pont)

Zsófi az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnek, kékkel vagy zölddel fogja színezni.

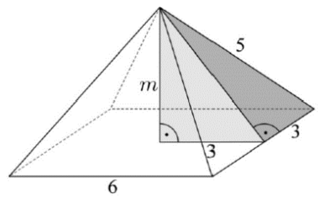
b) Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni? (Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgással nem vihetők egymásba.) (6 pont)

Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot" használ. Mindegyik fajta „varázskanóc" fehér színű, de a meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég, Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg! (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A gúla oldallap magasságának kiszámításához Pitagorasz-tételt írunk fel: $\sqrt{5^2-3^2}=4$, majd a gúla magasságához újra alkalmazzuk: $m=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}\approx 2,65\,\text{cm}$. (3 pont)



Ezután kiszámoljuk a gúla térfogatát.

$V_{gúla}=\dfrac{6^2\cdot\sqrt{7}}{3}=12\sqrt{7}\approx 31,75\,\text{cm}^3$ (1 pont)

Egy kocka alakú tömb térfogata $V_{kocka}=11^3=1331\,\text{cm}^3$, így egy kockából $\dfrac{1331}{31,75}\approx 41,9$, azaz **41** gyertya önthető ki. (3 pont)

b) Az alaplapot kétféleképpen lehet kiszínezni. (1 pont)
Az oldallapok lehetnek ugyanolyan színűek, mindegyik kék, vagy mindegyik zöld, ez összesen két eset. (1 pont)
Lehet három oldallap zöld és egy kék, vagy három oldallap kék és egy zöld, ez is összesen két eset. (1 pont)
Olyan festésből, amikor két oldallap zöld és két oldallap kék, szintén kétféle lehet, attól függően, hogy az ugyanolyan színű lapok szomszédosak vagy szemköztiek. (1 pont)
Az oldallapokat tehát hatféleképpen lehet kiszínezni, így összesen $2\cdot 6=\mathbf{12}$ különböző színezés készíthető. (2 pont)

c) Az első gyertya bármilyen színű lánggal éghet. (1 pont)
Annak, hogy a második gyertya más színű lánggal ég, $\dfrac{4}{5}$ a valószínűsége. (1 pont)
Annak, hogy a harmadik gyertya más színű lánggal ég, mint az első kettő, $\dfrac{2}{4}$ a valószínűsége. (1 pont)
Ekkor a kérdéses valószínűség $P=1\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{2}{5}=\mathbf{0,4}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

34) Egy forgáskúp alapkörének sugara 5 cm, magassága 9 cm hosszú. Számítsa ki a kúp térfogatát! (2 pont)

Megoldás:

$\left(\dfrac{5^2\pi\cdot 9}{3}=\right)75\pi\ \text{cm}^3\approx\ \mathbf{235,6\,cm^3}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

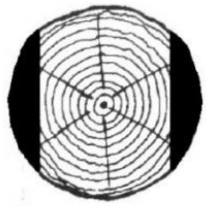
35) A Bocitej Kft. 1 literes tejesdobozának alakja négyzet alapú egyenes hasáb. A dobozt színültig töltik tejjel. Hány cm magas a doboz, ha az alapnégyzet oldala 7 cm? Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

1 liter = 1000 cm^3 (1 pont)
Ha a doboz m magas, akkor a térfogata $7\cdot 7\cdot m=1000$ (1 pont)
,ahonnan $\boldsymbol{m}\approx\mathbf{20,04\ (cm)}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

36) **A Hód Kft. Faárutelephelyén rönkfából (henger alakú fatörzsekből) a következő módon készítenek gerendát. A keresztfűrészgép először két oldalt levág egy-egy – az ábra sötéttel jelölt – részt, majd a fa 90°-kal történő elfordítása után egy hasonló vágással végül egy négyzetes hasáb alakú gerendát készít. A gépet úgy állítják be, hogy a kapott hasáb alaplapja a lehető legnagyobb legyen. Most egy forgáshenger alakú, 60 cm átmérőjű, 5 méter hosszú rönkfát fűrészel így a gép.**



a) Igaz-e, hogy a kapott négyzetes hasáb alakú fagerenda térfogata kisebb 1 köbméternél? (6 pont)

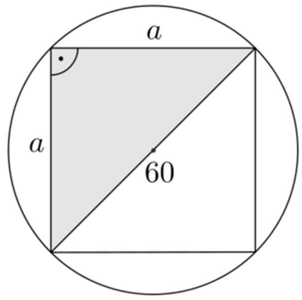
A Hód Kft. Deszkaárut is gyárt, ehhez a faanyagot 30000 Ft/m^3-es beszerzési áron vásárolja meg a termelőtől. A gyártás közben a megvásárolt fa kb. 40%-ából hulladékfa lesz. A késztermék 1 köbméterét 90000 forintért adja el a cég, de az eladási ár 35%-át a költségekre kell fordítania (feldolgozás, telephely fenntartása stb.).

b) Mennyi haszna keletkezik a Hód Kft.-nek 1 köbméter deszkaáru eladásakor? (5 pont)

A fakitermelő cég telephelyéről hat teherautó indul el egymás után. Négy teherautó fenyőfát, kettő pedig tölgyfát szállít.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a két, tölgyfát szállító teherautó közvetlenül egymás után gördül ki a telephelyről, ha az autók indulási sorrendje véletlenszerű! (6 pont)

Megoldás:



a) A farönk tekinthető egy 60 cm átmérőjű, 5 méter magasságú körhengernek. A fűrészelés után kapott hasáb alaplapja egy négyzet, melynek átlója a henger alapkörének átmérője. (1 pont)

Az alapkörbe írható négyzet oldalát a-val jelölve (Pitagorasz-tétel szerint): $a^2 + a^2 = 60^2$, ahonnan $a^2 = 1800$. (2 pont)

A négyzetes oszlop térfogata $1800 \cdot 500 = 900000\,\text{cm}^3$ (1 pont)

Mivel $1\,\text{m}^3 = 1000000\,\text{cm}^3$, így **az állítás igaz, a hasáb térfogata 1 köbméternél valóban kevesebb**. (2 pont)

b) $1\,\text{m}^3$ deszkaáru előállításához $1:0,6 = 1,6667\,\text{m}^3$ rönkfa szükséges, (2 pont)

melynek ára 50000 Ft (1 pont)

$1\,\text{m}^3$ deszkaárú eladási árának 35%-a 31500 Ft (1 pont)

A Hód Kft. Haszna egy köbméter deszkaáru eladásakor:

$90000 - 31500 - 50000 = \mathbf{8500\ Ft}$ (1 pont)

c) A hat teherautó összesen $6! = (720)$-féle sorrendben indulhat el. (1 pont)

A két, tölgyfát szállító teherautót tekintsük egy járműnek. (1 pont)

Az öt „jármű” lehetséges sorrendjeinek a száma $5! = (120)$ (1 pont)

A két tölgyfát szállító teherautó minden egyes sorrendben kétféleképpen helyezkedhet el közvetlenül egymás mögött (1 pont)

így a kedvező esetek száma $2 \cdot 5! = (240)$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\mathbf{\dfrac{240}{720} = \dfrac{1}{3}}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

37) Egy $100\ \text{cm} \times 50\ \text{cm} \times 50\ \text{cm}$ belső méretű (téglatest alakú) akváriumot vízzel töltünk fel. Mennyibe kerül a feltöltéshez szükséges víz, ha 1 köbméter víz ára 220 Ft? Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

Az akvárium térfogata $(100 \cdot 50 \cdot 50)\ \text{cm} = 250000\ \text{cm}^3 = 0,25\ \text{m}^3$. Mivel 1m^3 víz ára 220 Ft, az egyenes arányosság miatt $0,25\text{m}^3$ víz $0,25 \cdot 220 =$ **55 Ft-ba kerül**. (3 pont)

38) Egy jégkrémgyártó üzem fagylalttölcséreket rendel. A csonkakúp alakú fagylalttölcsér belső méretei: felső átmérő 7 cm, alsó átmérő 4 cm, magasság 8 cm.

a) Számítsa ki, hogy a tölcsérbe legfeljebb hány cm^3 jégkrém fér el, ha a jégkrém – a csomagolás miatt – csak a felső perem síkjáig érhet! (3 pont)

Ennek a tölcsérnek létezik olyan változata is, amelynek a belső felületét vékony csokoládéréteggel vonják be. 1 kg csokoládé kb. $0,7\text{m}^2$ felület bevonásához elegendő.

b) Számítsa ki, hogy hány kilogramm csokoládéra van szükség 1000 darab tölcsér belső felületének bevonásához! Válaszát egész kilogrammra kerekítve adja meg! (9 pont)

Egy fagylaltozóban hatféle ízű fagylalt kapható: vanília, csokoládé, puncs, eper, málna és dió. Andrea olyan háromgombócos fagylaltot szeretne venni tölcsérbe, amely kétféle ízű fagylaltból áll.

c) Hányféle különböző háromgombócos fagylaltot kérhet, ha számít a gombócok sorrendje is? (Például a dió-dió-vanília más kérésnek számít, mint a dió-vanília-dió.) (5 pont)

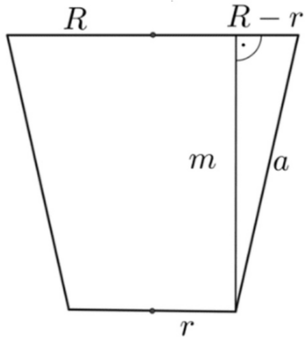
Megoldás:

a) A csonkakúp alakú tölcsér alapköreinek sugara $\frac{7}{2} = 3,5\,\text{cm}$ és $\frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$. (1 pont)

Így már ki tudjuk számolni a térfogatot: $V = \frac{8 \cdot \pi \cdot \left(3,5^2 + 3,5 \cdot 2 + 2^2\right)}{3} \approx \mathbf{195\,cm^3}$ (2 pont)

b) Az alapkör területe: $T_{\text{alapkör}} = 2^2\pi \approx 12,6\,\text{cm}^2$ (1 pont)

A palást területéhez ki kell számolnunk a trapéz szárának nagyságát.



Pitagorasz-tétellel: $a = \sqrt{1,5^2 + 8^2} \approx 8,14\,\text{cm}$ (1 pont)

A palást területe: $T_{\text{palást}} = 8,14 \cdot \pi \cdot (3,5 + 2) = 140,6\,\text{cm}^2$ (1 pont)

A teljes terület tehát $12,6 + 140,6 = 153,2\,\text{cm}^2$. (1 pont)

1000 tölcsér esetén: $1000 \cdot 153,2 =$
$= 153200\,\text{cm}^2 = 15,32\,\text{m}^2$ (3 pont)

Ekkora felület bevonásához $15,32 : 0,7 \approx$ **22 kg csokoládé szükséges.** (2 pont)

c) Az első két gombóc 6 esetben lehet egyforma. (1 pont)

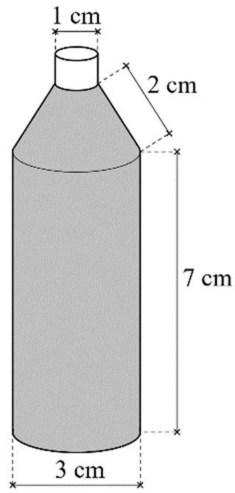
Mindegyik esetben 5-féle lehet a harmadik gombóc, ami $6\cdot5=30$ féle lehetőség. (1 pont)

Az első két gombóc $6\cdot5$ esetben lehet különböző, mindegyik esetben 2-féle lehet a harmadik gombóc, ami $6\cdot5\cdot2=60$ lehetőség. (2 pont)

Összesen tehát $30+60=$**90 féleképpen kérhet.** (1 pont)

Összesen: 17 pont

39) Az edzésen megsérült Cili térde, ezért megműtötték. A műtét utáni naptól kezdve rendszeres napi sétát írt elő neki a gyógytornász. Cili az első nap csak 20 métert sétált, majd minden nap 15 százalékkal nagyobb távot tett meg, mint az előző napon.



a) Egyik nap séta közben ezt mondta Cili: „A mai napon már 1000 métert sétáltam!” Hányadik napon mondhatta ezt először? (6 pont)

Cili – hogy segítse szervezete regenerálódását – vitamincseppeket szed. Naponta 2×25 csepp az adagja. Körülbelül 20 csepp folyadék térfogata 1 milliliter. A folyadék milliliterenként 100 milligramm hatóanyagot tartalmaz.

b) Hány milligramm hatóanyagot kap naponta Cili cseppek formájában? (2 pont)

A vitaminoldatot olyan üvegben árulják, amely két henger alakú és egy csonkakúp alakú részből áll. A folyadék a csonkakúp alakú rész fedőlapjáig ér. Az üveg belső méreteit az ábra mutatja. A nagyobb henger átmérője 3 cm, magassága 7 cm. A csonkakúp fedőlapjának átmérője 1 cm, alkotója 2 cm hosszú.

c) Hány napig elegendő Cilinek az üvegben lévő vitaminoldat, ha mindig az előírt adagban szedi? (9 pont)

Megoldás:

a) A Cili által naponta megtett távolságok mértani sorozatot alkotnak, melynek első tagja $a_1=20$, hányadosa $q=1{,}15$. (1 pont)

Ha a Cili által megtett táv az n-edik napon érte el először az 1000 métert, akkor $a_n=20\cdot1{,}15^{n-1}=1000$. (1 pont)

Mindkét oldalt 20-szal elosztva, és az oldalak logaritmusát véve $\lg1{,}15^{n-1}=\lg50$ (1 pont)

Egy hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságot alkalmazva: $(n-1)\cdot\lg1{,}15=\lg50$. (1 pont)

Az egyenletet n-re rendezve: $n=\dfrac{\lg50}{\lg1{,}15}+1=28{,}99$. (1 pont)

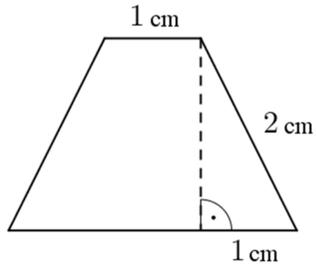
Mivel felfelé kerekítünk, Cili a **29. napon** mondhatta először, hogy aznap már 1000 métert sétált. (1 pont)

b) Ha 20 csepp folyadék 1 ml, akkor a napi 50 csepp vitaminoldat térfogata 2,5 ml (1 pont)

Ennek hatóanyag-tartalma $2{,}5\cdot100=$ **250 milligramm**. (1 pont)

c) A henger térfogata $1,5^2\pi\cdot 7\approx 49,5\,\text{cm}^3$. (1 pont)

A csonkakúp magassága Pitagorasz-tétellel (Lásd: ábra): $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}\approx 1,73\,\text{cm}$. (2 pont)



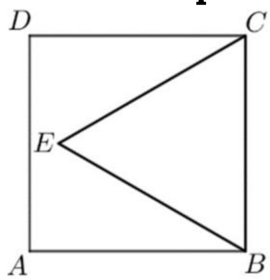
A csonkakúp térfogata:
$\dfrac{1,73\cdot\left(1,5^2+0,5^2+1,5\cdot 0,5\right)\cdot\pi}{3}\approx 5,9\,\text{cm}^3$. (2 pont)

A folyadék térfogata összesen $49,5+5,9=55,4\ \text{cm}^3$, így az üvegben kezdetben 55,4 ml vitaminoldat van. (2 pont)

Ez $55,4\cdot 20\approx 1108$ csepp, ami $\dfrac{1108}{50}\approx$ **22 napi adag.** (2 pont)

Összesen: 17 pont

40) Az *ABCD* négyzet oldalának hossza 12 egység. A négyzet belsejében kijelöltük az *E* pontot úgy, hogy $BC=BE=12$ egység legyen (lásd az ábrát).



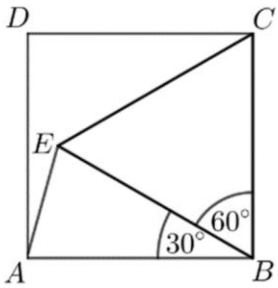
a) Számítsa ki az *A* és *E* pontok távolságát! (5 pont)

Egy bronzból készült, szabályos négyoldalú gúla alakú tömörtest (piramis) minden éle 10 cm hosszúságú.

b) Számítsa ki a gúla tömegét, ha 1 dm³ bronz tömege 8 kg! (7 pont)

Megoldás:

a) A BCE háromszög szabályos, ezért $CBE\sphericalangle=60°$.



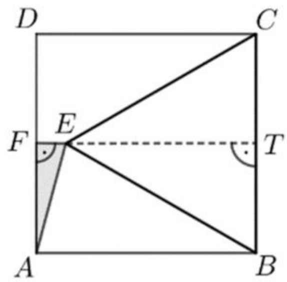
Az ABE (egyenlő szárú) háromszögben tehát $ABE\sphericalangle=90°-60°=30°$.

Az AE szakasz hosszát koszinusztétellel számolva: $AE^2=12^2+12^2-2\cdot 12\cdot\cos 30°\approx 38,58$.

Így $\boldsymbol{AE\approx 6,21}$ egység. (1 pont)

Alternatív megoldás:

A BCE szabályos háromszögben az ET magasság hossza Pitagorasz-tétellel: $ET=\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}$.

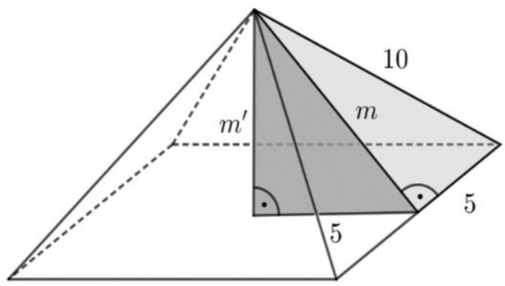


ET egyenese az AD oldalt az F felezőpontban metszi, így $EF=12-\sqrt{108}\approx 1,61$.

Az AEF derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$AE=\sqrt{6^2+1,61^2}\approx\mathbf{6,21}$. (2 pont)

b) A feladat megértését tükröző ábra.



A gúla oldallapjának magassága Pitagorasz-tétellel: $m=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}$. (1 pont)

A gúla magassága Pitagorasz-tétellel: $m'=\sqrt{\left(\sqrt{75}\right)^2-5^2}=\sqrt{50}$. (1 pont)

A gúla térfogata: $V=\dfrac{10^2\cdot\sqrt{50}}{3}\approx 235{,}7\ \text{cm}^3$. (2 pont)

$1\ \text{dm}^3=1000\ \text{cm}^3$. (1 pont)

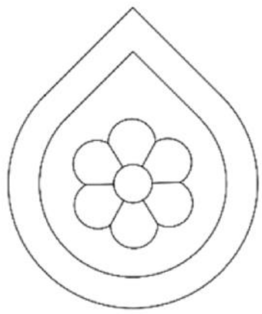
Így a gúla tömege $8\cdot 0{,}2357\approx \mathbf{1{,}89\ kg}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

41) A Föld teljes vízkészlete (jég, víz és vízgőz) folyékony halmazállapotban közel 1400 millió km³ lenne. Ennek a vízkészletnek csupán 3%-a édesvíz, melynek valójában mindössze 20%-a folyékony halmazállapotú (a többi főleg a sarkvidék jégtakarójában található fagyott, szilárd állapotban).

a) Számítsa ki, hogy hány kilométer lenne annak a legkisebb gömbnek a sugara, amelybe összegyűjthetnénk a Föld folyékony édesvízkészletét! Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg! (6 pont)

Az ábrán egy környezetvédő szervezet logójának ki nem színezett terve látható. A logó kilenc tartományát három színnel (sárga, kék és zöld) szeretnénk kiszínezni úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek. (Két tartomány szomszédos, ha a határvonalaiknak van közös pontja. Egy-egy tartomány színezéséhez egy színt használhatunk.)



b) Hányféleképpen lehet a logót a feltételeknek megfelelően kiszínezni? (6 pont)

Egy iskolai italautomata meghibásodott, és véletlenszerűen ad szénsavas, illetve szénsavmentes vizet. A diákok tapasztalata szerint, ha valaki szénsavmentes vizet kér, akkor csak 0,8 a valószínűsége annak, hogy valóban szénsavmentes vizet kap. Anna a hét mind az öt munkanapján egy-egy szénsavmentes vizet szeretne vásárolni az automatából, így minden nap az ennek megfelelő gombot nyomja meg.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább négy napon valóban szénsavmentes vizet ad az automata? (5 pont)

Megoldás:

a) A Föld folyékony állapotú édesvízkészlete a teljes vízkészlet $0{,}03\cdot 0{,}2=0{,}006$-szerese. (1 pont)

Azaz a Föld folyékony állapotú édesvízkészlete:

$1\,400\,000\,000\cdot 0{,}006=8\,400\,000$ km³. (2 pont)

A kérdéses gömb térfogata: $V=\dfrac{4}{3}r^3\pi=8\,400\,000$. (1 pont)

A gömb sugara: $r=\sqrt[3]{\dfrac{6\,300\,000}{\pi}}\approx 126{,}1$. (1 pont)

A kért kerekítéssel a gömb sugara **126 km**. (1 pont)

b) Ha a középső, kör alakú tartomány pl. sárga színű, akkor a hat sziromforma egyike sem lehet sárga. (1 pont)
Ekkor a szirmok váltakozva lehetnek kék, illetve zöld színűek, ami kétféleképpen valósulhat meg. (1 pont)
A szirmok körüli tartomány ekkor csak sárga lehet. (1 pont)
Ekkor a külső tartomány kék vagy zöld lehet. Ez szintén 2 lehetőség. (1 pont)
A középső tartomány színe nemcsak sárga, hanem kék vagy zöld is lehet (3 lehetőség). (1 pont)
Így a lehetséges színezések száma: $3 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{12}$. (1 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy Anna mind az öt nap szénsavmentes vizet kap: $0{,}8^5$. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy valaki szénsavmentes vizet kér, de szénsavasat kap: 0,2. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy Anna pontosan négy napon kap szénsavmentes vizet: $\binom{5}{1} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2$. (2 pont)
Annak a valószínűsége, hogy legalább négy napon valóban szénsavmentes vizet ad az automata: $0{,}8^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 \approx \mathbf{0{,}738}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

42) Egy téglatest alakú akvárium belső méretei: hosszúsága 50 cm, szélessége 20 cm, magassága 25 cm. Hány centiméterre lesz a víz szintje az akvárium felső szélétől, ha beletöltenek 19 liter vizet? Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

$19\ \text{liter} = 19000\ \text{cm}^3$. (1 pont)

Az akvárium alapterülete: $T = 50 \cdot 20 = 1000\ \text{cm}^2$. (1 pont)

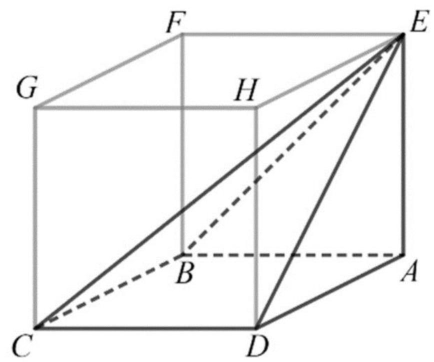
$19000 = 1000 \cdot m$, ahonnan $m = 19$ cm magasan áll a víz az akváriumban. (1 pont)

$25 - 19 = \mathbf{6\ cm}$-re lesz a víz szintje az akvárium felső szélétől. (1 pont)

Összesen: 4 pont

43) Az *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 6 cm.

a) Számítsa ki az ábrán látható *ABCDE* gúla felszínét! (6 pont)



b) Fejezze ki az $\overrightarrow{EC}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{AD}$ és az $\overrightarrow{AE}$ vektorok segítségével! (3 pont)

Egy 12 cm magas forgáskúp alapkörének sugara 6 cm.

c) Mekkora szöget zár be a kúp alkotója az alaplappal? (3 pont)

A fenti forgáskúpot két részre vágjuk az alaplap síkjával párhuzamos síkkal. Az alaplap és a párhuzamos sík távolsága 3 cm.

d) Számítsa ki a keletkező csonkakúp térfogatát! (5 pont)

Megoldás:

a) A gúla felszínét megkapjuk, ha a négyzet alakú alaplap területéhez hozzáadjuk két-két egybevágó derékszögű háromszög területét. (1 pont)

$T_{ABCD} = 36$ (1 pont)

$T_{ABE} = T_{ADE} = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18$ (1 pont)

A *BCE*, illetve *CDE* derékszögű háromszög 6 cm hosszú oldalához tartozó magasság az *EB*, illetve az *ED* szakasz. $EB = ED = 6\sqrt{2}$ (1 pont)

$T_{BCE} = T_{CDE} = \dfrac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$ (1 pont)

A felszín: $A = 36 + 2 \cdot 18 + 2 \cdot 18\sqrt{2} \approx \mathbf{122{,}9\ cm^2}$. (1 pont)

b) $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ (1 pont)

$\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}}$ (1 pont)

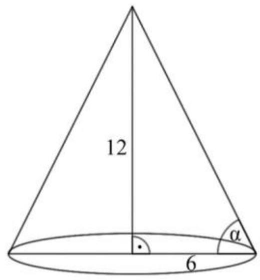
Alternatív megoldás:

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$ (1 pont)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}}$ (1 pont)

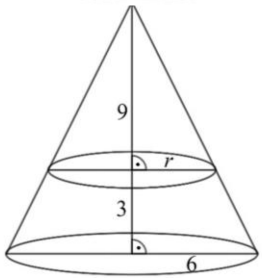
c) Készítsünk ábrát, amelyen α jelöli a kérdéses szöget! (1 pont)



$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{12}{6} = 2$ (1 pont)

$\boldsymbol{\alpha \approx 63{,}4°}$ (1 pont)

d) Készítsünk ábrát, amelyen *r* jelöli a levágott csonkakúp fedőkörének sugarát! (1 pont)



A hasonló háromszögek miatt $\dfrac{r}{9} = \dfrac{6}{12}$. (1 pont)

Így a keletkező csonkakúp fedőlapjának sugara 4,5. (1 pont)

A csonkakúp térfogata:

$$V = \frac{3 \cdot \pi \cdot \left(6^2 + 6 \cdot 4{,}5 + 4{,}5^2\right)}{3} = 83{,}25\pi\ \text{cm}^3 \approx \mathbf{261{,}5\ cm^3}.$$ (2 pont)

Alternatív megoldás:

Az eredeti kúp térfogata: $V_e = \dfrac{6^2 \cdot \pi \cdot 12}{3} = 144\pi \approx 452,4\ \text{cm}^3$. (1 pont)

A kúpból levágott kisebb kúp hasonló az eredetihez, a hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. (1 pont)

A levágott kisebb kúp térfogatának és az eredeti kúp térfogatának aránya $\lambda^3 = \dfrac{27}{64}$. (1 pont)

Így a levágott kúp térfogata $\lambda^3 \cdot V_e \approx 190,9\ \text{cm}^3$. (1 pont)

A csonkakúp térfogatát megkapjuk, ha az eredeti kúp térfogatából kivonjuk a levágott kúp térfogatát, azaz $V \approx 452,4 - 190,9 = \mathbf{261,5\ cm^3}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont